

DEVOIR MAISON 1

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.

Problème.

L'objectif de cet exercice est d'étudier une fonction à l'aide d'une fonction auxiliaire.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{e^x}{1 + 2e^x} - \ln(1 + 2e^x)$$

1. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) < 0$$

2. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
 3. Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$ et donner le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Étude d'une fonction et calcul d'une aire

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x)$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 4 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées).

4. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2e^{-2x} g(x)$$

5. (a) On admet que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(1 + t) \geq t - \frac{t^2}{2} \quad (*)$$

En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq 2e^{-x} - 2$$

puis déterminer la limite de f en $-\infty$.

- (b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{e^{2x}} + e^{-2x} \ln(2 + e^{-x})$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

6. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
 7. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.
 8. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

(a) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{e^{-x}}{1+2e^x} = e^{-x} - 2 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+2}$$

En déduire la valeur de l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1+2e^x} dx$.

(b) À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx$, puis donner une interprétation géométrique de $J(\alpha)$.

9. Démontrer l'inégalité (*) admise à la question 5.(a).

Exercice (facultatif).

Le but de cet exercice est de montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^n}} dx = 1$$

1. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, on a $\frac{1}{\sqrt{1+t}} \leq 1$.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par :

$$\forall t \in [0, 1], \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} - 1 + \frac{t}{2}$$

Étudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0, 1]$ puis établir que :

$$\forall t \in [0, 1], \quad 1 - \frac{t}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t}}$$

3. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0, 1], \quad 1 - \frac{x^n}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^n}} \leq 1$$

4. Conclure.