

DEVOIR MAISON 1

un corrigé

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme différence et composition de fonctions dérivables et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) &= \frac{e^x(1+2e^x) - e^x \times (2e^x)}{(1+2e^x)^2} - \frac{2e^x}{1+2e^x} = \frac{e^x}{(1+2e^x)^2} - \frac{2e^x}{1+2e^x} \\ &= \frac{e^x - 2e^x(1+2e^x)}{(1+2e^x)^2} \\ &= \frac{-e^x - 4e^{2x}}{(1+2e^x)^2} \\ &< 0\end{aligned}$$

car $-e^x - 4e^{2x} < 0$ tandis que $(1+2e^x)^2 > 0$. Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) < 0}$$

2. ★ **Étude de la limite en $-\infty$**

On sait que $e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ donc :

$$\frac{e^x}{1+2e^x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \quad \text{et} \quad \ln(1+2e^x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ln(1) = 0$$

On en déduit que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0}$$

- ★ **Étude de la limite en $+\infty$**

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+2e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x(e^{-x}+2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{-x}+2} = \frac{1}{2}$$

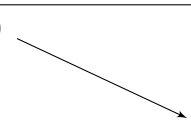
De plus, on sait que $1+2e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\ln(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ donc, par composition de limites, on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+2e^x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t) = +\infty$$

D'après les opérations sur les limites, on peut conclure que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty}$$

3. Les questions 2. et 3. permettent d'obtenir à la fois le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$ ainsi que son signe :

x	$-\infty$ $+\infty$
$g'(x)$	—
g	0  $-\infty$
$g(x)$	—

Partie B : Étude d'une fonction et calcul d'une aire

4. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composition de fonctions dérivables et :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) &= -2e^{-2x} \ln(1 + 2e^x) + e^{-2x} \times \frac{2e^x}{1 + 2e^x} \\ &= 2e^{-2x} \left(\frac{e^x}{1 + 2e^x} - \ln(1 + 2e^x) \right) \\ &= 2e^{-2x} g(x)\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2e^{-2x} g(x)}$$

5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On sait que $e^x \in \mathbb{R}_+$ (on a même $e^x > 0$) donc, d'après l'inégalité (*) admise appliquée au point $t = 2e^x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\ln(1 + 2e^x) \geq 2e^x - \frac{(2e^x)^2}{2} \quad i.e. \quad \ln(1 + 2e^x) \geq 2e^x - 2e^{2x}$$

En multipliant par $e^{-2x} \geq 0$, on obtient :

$$e^{-2x} \ln(1 + 2e^x) \geq e^{-2x} (2e^x - 2e^{2x}) \quad i.e. \quad f(x) \geq 2e^{-x} - 2$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geq 2e^{-x} - 2}$$

On a $2e^{-x} - 2 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison et l'inégalité ci-dessus, on peut conclure que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\ln(1 + 2e^x) &= \ln\left(e^x \left[\frac{1}{e^x} + 2\right]\right) = \ln(e^x) + \ln(2 + e^{-x}) \\ &= x + \ln(2 + e^{-x})\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$f(x) = e^{-2x} \ln(1 + 2e^x) = e^{-2x} (x + \ln(2 + e^{-x})) = xe^{-2x} + e^{-2x} \ln(2 + e^{-x})$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{e^{2x}} + e^{-2x} \ln(2 + e^{-x})}$$

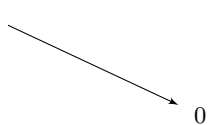
D'après les croissances comparées, on sait que $\frac{x}{e^{2x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. De plus :

$$e^{-2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \ln(2 + e^{-x}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln(2)$$

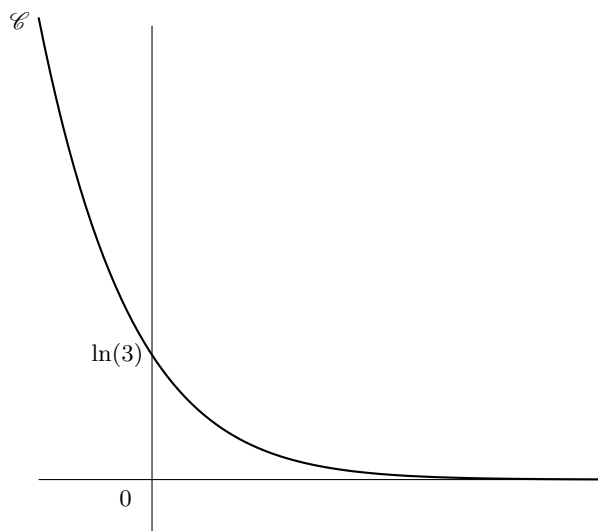
donc, d'après les opérations sur les limites, $e^{-2x} \ln(2 + e^{-x}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. On peut donc conclure que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$$

6. La fonction g est à valeurs négatives sur $\mathbb{R}$ (cf. question 3.) et la fonction $x \mapsto 2e^{-2x}$ est positive sur $\mathbb{R}$. D'après la question 4., la fonction f' est donc négative sur $\mathbb{R}$. On en déduit le tableau de variation de f suivant sur $\mathbb{R}$ (les limites ont été obtenues à la question 5.) :

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	—
f	$+\infty$ 0 

7. Graphe de la fonction f



8. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} e^{-x} - 2 \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 2} &= \frac{e^{-x}(e^{-x} + 2) - 2e^{-x}}{e^{-x} + 2} = \frac{e^{-2x} + 2e^{-x} - 2e^{-x}}{e^{-x} + 2} \\ &= \underbrace{\frac{e^x}{e^x}}_{=1} \times \frac{e^{-2x}}{e^{-x} + 2} \\ &= \frac{e^{-x}}{e^x \times e^{-x} + 2e^x} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{e^{-x}}{1 + 2e^{-x}} = e^{-x} - 2 \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 2}}$$

En utilisant la décomposition obtenue, il vient :

$$I(\alpha) = \int_0^\alpha \left(e^{-x} - 2 \frac{e^{-x}}{e^{-x} + 2} \right) dx = \left[-e^{-x} + 2 \ln(e^{-x} + 2) \right]_0^\alpha$$

i.e. :

$$\boxed{I(\alpha) = -e^{-\alpha} + 2 \ln(e^{-\alpha} + 2) + 1 - 2 \ln(3)}$$

(b) On veut calculer l'intégrale $J(\alpha) = \int_0^\alpha e^{-2x} \ln(1 + 2e^x) dx$. Posons :

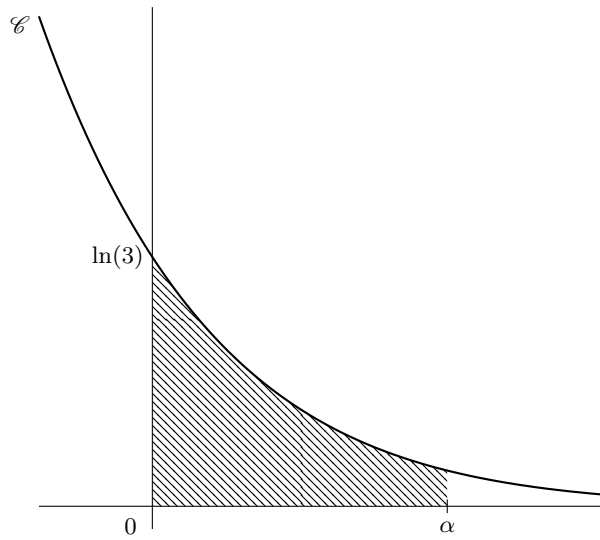
$$\begin{aligned} u'(x) &= e^{-2x} & v(x) &= \ln(1 + 2e^x) \\ u(x) &= -\frac{e^{-2x}}{2} & v'(x) &= \frac{2e^x}{1 + 2e^x} \end{aligned}$$

La formule d'intégration par parties nous donne :

$$\begin{aligned} J(\alpha) &= \int_0^\alpha u'(x)v(x) dx = \left[u(x)v(x) \right]_0^\alpha - \int_0^\alpha u(x)v'(x) dx \\ &= \left[-\frac{e^{-2x}}{2} \ln(1 + 2e^x) \right]_0^\alpha - \int_0^\alpha -\frac{e^{-2x}}{2} \times \frac{2e^x}{1 + 2e^x} dx \\ &= -\frac{e^{-2\alpha}}{2} \ln(1 + 2e^\alpha) + \frac{\ln(3)}{2} + \underbrace{\int_0^\alpha \frac{e^{-x}}{1 + 2e^x} dx}_{=I(\alpha)} \end{aligned}$$

En utilisant la question précédente, on en déduit que :

$$\boxed{J(\alpha) = 1 - \frac{3 \ln(3)}{2} - e^{-\alpha} + 2 \ln(e^{-\alpha} + 2) - \frac{e^{-2\alpha}}{2} \ln(1 + 2e^\alpha)}$$



La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$ et $\alpha \geq 0$ donc :

l'intégrale $J(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx$ représente l'aire géométrique (hachurée ci-dessus) délimitée par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f et la droite (verticale) d'équation $x = \alpha$

9. Considérons la fonction $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2} \end{cases}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme somme de fonctions qui le sont et :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 + t = \frac{1 - (1+t) + t(1+t)}{1+t} = \frac{t^2}{1+t} \geq 0$$

car $t^2 \geq 0$ et $1+t > 0$. On en déduit le sens de variation de φ sur $\mathbb{R}_+$ suivant.

t	0 $+\infty$
$\varphi'(t)$	+
φ	

La fonction φ est donc en particulier minorée par $\varphi(0) = 0$ sur $\mathbb{R}_+$, *i.e.* :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(t) \geq 0 \quad \text{i.e.} \quad \ln(1+t) - t + \frac{t^2}{2} \geq 0$$

Finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \ln(1+t) \geq t - \frac{t^2}{2}$$

L'inégalité (*) est donc démontrée.

Remarque : le calcul de la limite de φ en $+\infty$ n'est pas utile pour répondre à la question.

Exercice.

1. Soit $t \in [0, 1]$. On a $1 \leq 1+t$ et comme la fonction racine carrée est croissante sur l'intervalle $[0, 1]$, il vient $1 \leq \sqrt{1+t}$ (puisque $\sqrt{1} = 1$). En passant à l'inverse (les nombres réels mis en jeu sont strictement positifs), on obtient $\frac{1}{\sqrt{1+t}} \leq 1$. Finalement :

$$\boxed{\forall t \in [0, 1], \quad \frac{1}{\sqrt{1+t}} \leq 1}$$

2. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0, 1]$ et, pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

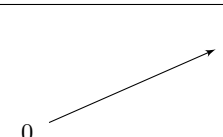
$$f'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{1+t}(1+t)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+t}(1+t)} \right)$$

Or, pour tout $t \in [0, 1]$, on a $1+t \geq 1$ et $\sqrt{1+t} \geq 1$ (on a déjà établi ces inégalités à la question 1.) donc $\sqrt{1+t}(1+t) \geq 1$. En passant à l'inverse, il vient $\frac{1}{\sqrt{1+t}(1+t)} \leq 1$ et donc $f'(t) \geq 0$. On en déduit que :

la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0, 1]$

On peut dresser le tableau de variation de la fonction f :

t	0	1
f	0	$f(1)$



Soit $t \in [0, 1]$. Comme $f(t) \geq 0$, on a $\frac{1}{\sqrt{1+t}} - 1 + \frac{t}{2} \geq 0$, d'où l'inégalité $\frac{1}{\sqrt{1+t}} \geq 1 - \frac{t}{2}$. Finalement,

$$\boxed{\forall t \in [0, 1], \quad 1 - \frac{t}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t}}}$$

3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$. D'après les questions 1. et 2., on sait que pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$1 - \frac{t}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+t}} \leq 1 \quad (\star)$$

Comme $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x^n \in [0, 1]$. L'inégalité $(\star)$ appliquée avec $t = x^n$ fournit donc :

$$1 - \frac{x^n}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^n}} \leq 1$$

Finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [0, 1], \quad 1 - \frac{x^n}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^n}} \leq 1}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait d'après la question 3. que pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$1 - \frac{x^n}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^n}} \leq 1$$

Par croissance de l'intégrale, on a (les bornes sont dans le bon ordre : $0 \leq 1$) :

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{x^n}{2} \right) dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^n}} dx \leq \int_0^1 1 dx$$

Or :

$$\int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1$$

et :

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{x^n}{2} \right) dx = \left[x - \frac{x^{n+1}}{2(n+1)} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2(n+1)}$$

On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - \frac{1}{2(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^n}} dx \leq 1$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2(n+1)} \right) = 1$$

Le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^n}} dx = 1}$$