Devoir Maison 1

un corrigé

Exercice.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\mathscr{D}_{\ln} = \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$x \in \mathscr{D}_f \iff \begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \mathrm{e}^0 = 1 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{le domaine de définition de } f \text{ est } \mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} =]0,1[\cup]1,+\infty[}$$

2. La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ et :

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \qquad f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x\ln(x)^2} > 0$$

Ainsi, la fonction f est (strictement) croissante sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$. Comme $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$, on a $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0$ et donc :

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty}$$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0$ et :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

Enfin, on a $\lim\limits_{x\to1^+} \ln(x) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{1}{\ln(x)} = +\infty$ puis :

$$\boxed{\lim_{x\to1^+} f(x) = -\infty} \qquad \text{et, de la même manière,} \qquad \boxed{\lim_{x\to1^-} f(x) = +\infty}$$

car $\lim\limits_{x\to1^-} \ln(x) = 0^-$.

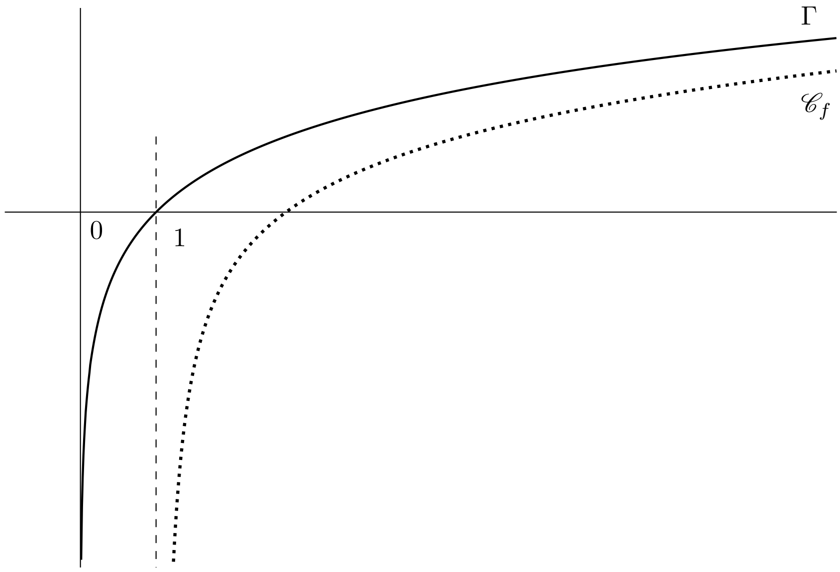
x	0			1		$+\infty$
f	$\Vert$	$-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Pour tout $x \in]1,+\infty[$, on a :

$$f(x) - \ln(x) = -\frac{1}{\ln(x)} < 0 \qquad \text{car} \qquad \ln(x) > 0$$

On en déduit que :

$$\boxed{\text{la courbe } \mathscr{C}_f \text{ est en-dessous de } \Gamma \text{ sur l'intervalle }]1,+\infty[}$$



4. Soit $a \in]1, +\infty[$. L'équation de la tangente T_a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Ainsi :

$$\boxed{T_a \text{ passe par l'origine} \iff 0 = f'(a)(0-a) + f(a) \iff f(a) - af'(a) = 0}$$

5. Soit $x \in]1, +\infty[$. On a :

$$\begin{aligned} g(x) = 0 \iff f(x) - xf'(x) = 0 &\iff \ln(x) - \frac{1}{\ln(x)} - x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x\ln(x)^2}\right) = 0 \\ &\iff \ln(x) - \frac{1}{\ln(x)} - 1 - \frac{1}{\ln(x)^2} = 0 \\ &\iff \frac{\ln(x)^3 - \ln(x) - \ln(x)^2 - 1}{\ln(x)^2} = 0 \\ &\iff \ln(x)^3 - \ln(x)^2 - \ln(x) - 1 = 0 \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\text{sur l'intervalle }]1, +\infty[\text{, les équations } g(x) = 0 \text{ et } \ln(x)^3 - \ln(x)^2 - \ln(x) - 1 = 0 \text{ ont les mêmes solutions}}$$

6. (a) La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad u'(t) = 3t^2 - 2t - 1$$

Le discriminant de ce trinôme du second degré vaut $(-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16$. Les racines de u' sont donc :

$$\frac{2 - \sqrt{16}}{2 \times 3} = -\frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad \frac{2 + \sqrt{16}}{2 \times 3} = 1$$

On en déduit le signe de u' et le sens de variations de u sur $\mathbb{R}$ suivant :

t	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$u'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
u	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{22}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Pour obtenir les limites de u en $\pm\infty$, il suffit de factoriser par t^3 dans l'expression de u.

(b) D'après le tableau de variations de u, on a :

$$\forall t \in]-\infty, 1], \qquad u(t) < 0$$

La fonction u ne s'annule donc pas sur l'intervalle $]-\infty, 1]$. Sur l'intervalle $[1, +\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. De plus, $u(1) = -2 < 0$ et $\lim_{t \to +\infty} u(t) = +\infty$. D'après le théorème de la bijection, la fonction u s'annule une et une seule fois dans l'intervalle $[1, +\infty[$. Finalement :

$$\boxed{\text{la fonction } u \text{ s'annule une unique fois sur } \mathbb{R}}$$

7. Soit $a \in]1, +\infty[$. Alors :

$$\begin{aligned}
T_a \text{ passe par } O &\iff f(a) - af'(a) = 0 \qquad \text{(question 4.)} \\
&\iff g(a) = 0 \qquad \text{(par définition de } g\text{)} \\
&\iff \ln(a)^3 - \ln(a)^2 - \ln(a) - 1 = 0 \qquad \text{(question 5.)} \\
&\iff u(\ln(a)) = 0 \qquad \text{(par définition de } u\text{)} \\
&\iff \ln(a) = \alpha \qquad \text{(question 6.(b))} \\
&\iff a = \mathrm{e}^{\alpha}
\end{aligned}$$

Remarquons qu'on a bien $a > 1$ car $\alpha \geqslant 1 > 0$ (*cf.* le raisonnement mené à la question 6.(b)). Finalement :

$$\boxed{\text{sur l'intervalle }]1, +\infty[\text{, il existe une unique tangente à la courbe } \mathscr{C}_f \text{ passant par le point } O}$$