# Devoir Maison 1

- Un devoir rendu après la date indiquée ne sera pas corrigé.
- Soignez la présentation.
- Chaque conclusion doit être encadrée.
- La rédaction doit être soignée.
- Toute variable utilisée dans un raisonnement doit être préalablement introduite.

## Exercice.

On considère la fonction $f$ d'expression :

$$f(x) = \ln(x) - \frac{1}{\ln(x)}$$

On nomme $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ et $\Gamma$ la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \ln(x)$ dans un repère orthogonal d'origine notée $O$.

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de $f$.
2. Étudier les variations de la fonction $f$ sur $\mathscr{D}_f$ et déterminer les limites de $f$ aux bornes de son domaine de définition.
   *On dressera notamment le tableau de variations de $f$.*
3. Préciser les positions relatives des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\Gamma$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$ et représenter graphiquement ces deux courbes sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

*On se place désormais sur l'intervalle* $]1, +\infty[$. On se propose de chercher les tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ passant par le point $O(0, 0)$.

4. Soit $a \in ]1, +\infty[$.
   Démontrer que la tangente (notée $T_a$) à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a$ passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a) - af'(a) = 0$.

On note $g$ la fonction définie par :

$$\forall x \in ]1, +\infty[, \qquad g(x) = f(x) - xf'(x)$$

5. Montrer que, sur l'intervalle $]1, +\infty[$, les équations :
   $$g(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \ln(x)^3 - \ln(x)^2 - \ln(x) - 1 = 0$$
   ont les mêmes solutions.
6. (a) Étudier les variations de la fonction $u$ définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$$
   *On dressera notamment le tableau de variations de $u$.*
   (b) Montrer que la fonction $u$ s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$. *On notera $\alpha$ le point d'annulation de $u$ sur $\mathbb{R}$.*
7. En déduire que, sur l'intervalle $]1, +\infty[$, il existe une unique tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ passant par le point $O$.