Transformée de Fourier discrète

(facultatif)

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel non nul. On munit l'ensemble $\mathbb{C}^n$ d'une addition $+$ de la manière suivante. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tous vecteurs $u = (u_0, \dots, u_{n-1})$, et $v = (v_0, \dots, v_{n-1})$ de $\mathbb{C}^n$, on pose :

$$u + \lambda v = (u_0 + \lambda v_0, \dots, u_{n-1} + \lambda v_{n-1})$$

On pose $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$. L'objectif est d'étudier l'application $\mathscr{F}_n : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ qui à $u = (u_0, \dots, u_{n-1})$ associe l'élément $\mathscr{F}_n(u) = (v_0, \dots, v_{n-1})$ défini par :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \qquad v_k = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{u_j}\omega^{jk}$$

Partie A – Préliminaires

1. Pour tout entier naturel k, calculer les sommes $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{jk}$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \omega^{jk}$.
2. Déterminer $\mathscr{F}_n(1, 1, \dots, 1)$ et $\mathscr{F}_n(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$.
3. Calculer $\mathscr{F}_n \circ \mathscr{F}_n$. En déduire que $\mathscr{F}_n$ est une application bijective et déterminer son application réciproque.
4. Montrer que :
$$\forall u, u' \in \mathbb{C}^n,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \mathscr{F}_n(u + \lambda u') = \mathscr{F}_n(u) + \lambda \mathscr{F}_n(u')$$
On dit que l'application $\mathscr{F}_n$ est $\mathbb{R}$-linéaire.
5. Déterminer $\mathscr{F}_n^{-1}(1, 1, 0, \dots, 0)$.

Partie B – Équations de convolution

Pour tous $u, v \in \mathbb{C}^n$ tels que $u = (u_0, \dots, u_{n-1})$ et $v = (v_0, \dots, v_{n-1})$, on définit :

- ⋆ le produit terme à terme de u et v, noté $u \times v$, défini par :
$$u \times v = (u_0 v_0, \dots, u_{n-1} v_{n-1})$$
- ⋆ le *produit de convolution* de u et v, noté $u \otimes v$, défini par $u \otimes v = (w_0, \dots, w_{n-1})$ où, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, le nombre complexe w_k est la somme de tous les termes $u_i v_j$ tels que $i + j \equiv k\,[n]$, ce que l'on note :
$$w_k = \sum_{i+j \equiv k\,[n]} u_i v_j$$

6. Montrer que :
$$\forall u, v \in \mathbb{C}^n, \qquad \mathscr{F}_n(u \otimes v) = \mathscr{F}_n(u) \times \mathscr{F}_n(v)$$
7. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation $u \otimes x = v$ d'inconnue $x \in \mathbb{C}^n$ admette une solution.
8. Résoudre l'équation $(1, 1, \dots, 1) \otimes x = (1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$.

Partie C – Algorithme de Cooley-Tukey

9. Soient $(u_0, u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{C}^4$ et $(v_0, v_1, v_2, v_3) = \mathscr{F}_4(u_0, u_1, u_2, u_3)$.
   (a) Montrer qu'il existe $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{C}$ tels que :
   $$v_0 = a_0 + b_0, \quad v_2 = a_0 - b_0, \quad v_1 = a_1 + \omega b_1 \quad \text{et} \quad v_3 = a_1 - \omega b_1$$
   (b) Déterminer $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{C}$ tels que $(a_0, a_1) = \mathscr{F}_2(\alpha_0, \alpha_1)$.
10. On suppose qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = 2m$. Pour tout $u \in \mathbb{C}^n$, on notera $u^{(P)}$ (respectivement $u^{(I)}$) l'élement de $\mathbb{C}^m$ constitué des coefficients d'indices pairs (respectivement impairs) de u.
    (a) Posons $\mathscr{F}_n(u) = (v_0, \ldots, v_{n-1})$. Montrer que les éléments :
    $$(a_0, \ldots, a_{m-1}) = \mathscr{F}_m(u^{(P)}) \qquad \text{et} \qquad (b_0, \ldots, b_{m-1}) = \mathscr{F}_m(u^{(I)})$$
    sont tels que :
    $$\forall k \in [\![0, m-1]\!], \qquad v_k = a_k + \omega^k b_k \qquad \text{et} \qquad v_{m+k} = a_k - \omega^k b_k$$
    (b) On note M_n le nombre de multiplications nécessaires pour calculer $\mathscr{F}_n(u)$ pour $u \in \mathbb{C}^n$. Que peut-on dire de M_n ?