Ensembles saturés

(facultatif)

Par convention, une réunion portée par un ensemble vide d'indices est égale à l'ensemble vide.

Partie I – Parties saturées pour une relation d'équivalence

Soient E un ensemble non vide et $\sim$ une relation d'équivalence sur E. La classe d'équivalence d'un élément x de E sera noté $\overline{x}$.

Pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, on définit le saturé de A par :

$$s(A) = \bigcup_{x \in A} \overline{x}$$

et on dit que l'ensemble A est saturé si $s(A) = A$.

1. *Étude d'un exemple.*
   Dans cette question uniquement, on considère la relation $\sim$ sur $\mathbb{Z}$ définie par :
   $$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \qquad m \sim n \iff m^2 \equiv n^2\,[5]$$
   (a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
   (b) Donner les classes d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ pour cette relation.
   (c) En déduire les ensembles saturés sur $\mathbb{Z}$ pour la relation $\sim$.
2. Soit $A \in \mathscr{P}(E)$.
   (a) Comparer les ensembles A et $s(A)$.
   (b) Montrer que l'ensemble $s(A)$ est saturé.
   (c) Montrer que :
   $$\forall x \in E, \qquad x \in s(A) \iff (\overline{x} \cap s(A) \neq \varnothing)$$
   En déduire $s(E \setminus s(A))$.
3. Soient I un ensemble non vide et $(A_i)_{i \in I} \in \mathscr{P}(E)^I$ une famille de parties de E.
   (a) Montrer que :
   $$s\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} s(A_i) \qquad \text{et} \qquad s\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} s(A_i)$$
   (b) Donner un exemple où l'inclusion précédente est stricte.

Partie II – Parties saturées pour une application

Soient E et F deux ensembles (non vides) $f \in F^E$ une application de E dans F.

4. On considère la relation binaire $\sim_f$ définie par :
   $$\forall x, y \in E, \qquad x \sim_f y \iff f(x) = f(y)$$
   Montrer que $\sim_f$ est une relation d'équivalence sur E.
   Dans la suite, on notera, comme dans la première partie, $\overline{x}$ la classe d'équivalence d'un élément x de E pour la relation $\sim_f$.

5. Montrer que :
$$\forall x \in E, \qquad \overline{x} = f^{-1}\big(\{f(x)\}\big)$$
6. Soit $X \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que :
$$s(X) = f^{-1}(f(X)),$$
où $s(X)$ est le saturé de X défini dans la première partie, pour la relation $\sim_f$.

Dans la suite, on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des parties de E saturées pour la relation $\sim_f$, *i.e.* :
$$\mathscr{S} = \big\{X \in \mathscr{P}(E) \,\big|\, f^{-1}(f(X)) = X\big\}$$

7. Montrer que :
$$\forall A \in \mathscr{P}(E), \qquad f^{-1}(f(A)) \in \mathscr{S}$$
8. Soient $X \in \mathscr{S}$ et $A \in \mathscr{P}(E)$ tels que $X \cap A = \varnothing$. Montrer que $X \cap f^{-1}(f(A)) = \varnothing$.
9. Soient $X, Y \in \mathscr{S}$. Montrer que les ensembles $E \setminus X$ et $Y \setminus X$ appartiennent à $\mathscr{S}$.
10. Montrer que l'application :
$$\tilde{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{S} & \longrightarrow & \mathscr{P}(f(E)) \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array} \right.$$
est bijective.