Autour de la dérivation discrète

un corrigé

Partie 1 : puissances factorielles descendantes

1. Soient $x, m \in \mathbb{N}$.
   - ⋆ Si $x \geqslant m$, alors :

$$x^{\underline{m}} = x(x-1) \times \cdots \times \times (x-m+1) = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{x} k}{\displaystyle\prod_{k=1}^{x-m} k} \qquad i.e. \qquad \boxed{x^{\underline{m}} = \frac{x\,!}{(x-m)\,!}}$$

   - ⋆ Si $x < m$, alors $m \geqslant 1$ et $x \in [\![0, m-1]\!]$ (car x est un entier) donc :

$$\boxed{x^{\underline{m}} = \prod_{k=0}^{m-1} (x-k) = 0}$$

2. Soient $m, x \in \mathbb{N}$. On a (par définition de $x^{\underline{m+1}}$) :

$$x^{\underline{m+1}} = \prod_{k=0}^{m} (x-k) = \left(\prod_{k=0}^{m-1} (x-k) \right)(x-m) \qquad i.e. \qquad \boxed{x^{\underline{m+1}} = (x-m)x^{\underline{m}}}$$

3. Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Montrons que :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \qquad (a+b)^{\underline{m}} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{\underline{k}}\, b^{\underline{m-k}}$$

en utilisant un raisonnement par récurrence.
   - ⋆ On sait que $(a+b)^{\underline{0}} = 1$ et on a :

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^{\underline{k}}\, b^{\underline{0-k}} = \binom{0}{0} a^{\underline{0}}\, b^{\underline{0}} = 1$$

   donc l'égalité est vraie pour $m = 0$.
   - ⋆ Soit $m \in \mathbb{N}$. On suppose que $(a+b)^{\underline{m}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{\underline{k}}\, b^{\underline{m-k}}$. Montrons que :

$$(a+b)^{\underline{m+1}} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^{\underline{k}}\, b^{\underline{m+1-k}}$$

   D'après la question 2., on a :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{\underline{m+1}} &= (a+b-m)(a+b)^{\underline{m}} \\
&= (a+b-m) \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{\underline{k}}\, b^{\underline{m-k}} \qquad \text{(hypothèse de récurrence)} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \big[(a-k) + (b-(m-k))\big] \binom{m}{k} a^{\underline{k}}\, b^{\underline{m-k}} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (a-k) a^{\underline{k}}\, b^{\underline{m-k}} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{\underline{k}}\, (b-(m-k)) b^{\underline{m-k}} \\
&= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{\underline{k+1}}\, b^{\underline{m-k}} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{\underline{k}}\, b^{\underline{m+1-k}} \qquad \text{(question 2.)}
\end{aligned}$$

Le changement d'indice $\ell = k+1$ dans la première somme fournit :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{\underline{m+1}} &= \sum_{\ell=1}^{m+1} \binom{m}{\ell-1} a^{\underline{\ell}}\, b^{\underline{m+1-\ell}} + \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{\underline{k}}\, b^{\underline{m+1-k}} \\
&= a^{\underline{m+1}}\, b^{\underline{0}} + \sum_{k=1}^{m} \left[\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k}\right] a^{\underline{k}}\, b^{\underline{m+1-k}} + a^{\underline{0}}\, b^{\underline{m+1}} \\
&= \underbrace{a^{\underline{m+1}}\, b^{\underline{0}}}_{k=m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} a^{\underline{k}}\, b^{\underline{m+1-k}} + \underbrace{a^{\underline{0}}\, b^{\underline{m+1}}}_{k=0} \qquad \text{(triangle de Pascal)} \\
&= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^{\underline{k}}\, b^{\underline{m+1-k}}
\end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie au rang $m+1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}, \qquad (a+b)^{\underline{m}} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{\underline{k}}\, b^{\underline{m-k}}}$$

Partie 2 : dérivation discrète

4. Soit $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une fonction constante. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{N}, \qquad g(x+1) = g(x) \qquad \textit{i.e.} \qquad \Delta(g)(x) = 0$$

Autrement dit :

$$\boxed{\Delta(g) = \Delta(f_0) = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}}$$

car la fonction f_0 est constante (égale à 1).

5. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a (d'après la question 3.) :

$$\begin{aligned}
f_m(x+1) = (x+1)^{\underline{m}} &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{\underline{k}}\, 1^{\underline{m-k}} \\
&= \sum_{k=0}^{m-2} \binom{m}{k} x^{\underline{k}}\, 1^{\underline{m-k}} + \binom{m}{m-1} x^{\underline{m-1}}\, 1^{\underline{1}} + \binom{m}{m} x^{\underline{m}}\, 1^{\underline{0}}
\end{aligned}$$

Si $k \leqslant m-2$, alors $m-k \geqslant 2 > 1$ donc $1^{\underline{m-k}} = 0$. De plus, $1^{\underline{1}} = 1^{\underline{0}} = 1$ donc :

$$f_m(x+1) = m x^{\underline{m-1}} + x^{\underline{m}} = m f_{m-1}(x) + f_m(x)$$

On a donc l'égalité $\Delta(f_m)(x) = m f_{m-1}(x)$. Ainsi :

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N}^*, \qquad \Delta(f_m) = m f_{m-1}}$$

6. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{N}$. D'après la formule du triangle de Pascal, on a :

$$\Delta(b_k)(x) = b_k(x+1) - b_k(x) = \binom{x+1}{k} - \binom{x}{k} = \binom{x}{k-1}$$

En effet, cette égalité reste valable si $k = 0$ ou si $k \geqslant x$. Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \Delta(b_k) = b_{k-1}}$$

où b_{-1} désigne la suite nulle.

7. Soient $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda f + \mu g)(x) &= (\lambda f + \mu g)(x+1) - (\lambda f + \mu g)(x) \\
&= \lambda f(x+1) + \mu g(x+1) - \lambda f(x) - \mu g(x) \\
&= \lambda(f(x+1) - f(x)) + \mu(g(x+1) - g(x)) \\
&= \lambda \Delta(f)(x) + \mu \Delta(g)(x) \\
&= (\lambda \Delta(f) + \mu \Delta(g))(x)
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\Delta(fg)(x) = (fg)(x+1) - (fg)(x) &= f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x) \\ &= f(x+1)(g(x+1) - g(x)) + (f(x+1) - f(x))g(x) \\ &= \tau(f)(x)\Delta(g)(x) + \Delta(f)(x)g(x)\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\boxed{\forall f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \qquad \Delta(\lambda f + \mu g) = \lambda\Delta(f) + \mu\Delta(g) \qquad \text{et} \qquad \Delta(fg) = \tau(f)\Delta(g) + \Delta(f)g}$$

Partie 3 : intégration discrète

8. On raisonne par analyse-synthèse.
   ⋆ **Analyse :** soit $e \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $e(0) = 1$ et $\Delta(e) = e$. Alors :

   $$\forall x \in \mathbb{N}, \qquad e(x+1) - e(x) = e(x) \qquad \textit{i.e.} \qquad e(x+1) = 2e(x)$$

   Comme $e(0) = 1$, on a $e(1) = 2$ puis, par une récurrence immédiate,

   $$\forall x \in \mathbb{N}, \qquad e(x) = 2^x$$

   Ainsi, si e est solution du problème, alors $e : x \longmapsto 2^x$. Ceci prouve l'unicité en cas d'existence.
   ⋆ **Synthèse :** la fonction $e : x \longmapsto 2^x$ est telle que $e(0) = 1$. De plus :

   $$\forall x \in \mathbb{N}, \qquad \Delta(e)(x) = e(x+1) - e(x) = 2^{x+1} - 2^x = 2 \times 2^x - 2^x = 2^x = e(x)$$

   donc $\Delta(e) = e$. Ceci prouve l'existence.

   Finalement :

   $$\boxed{\exists !\, e \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ e(0) = 1 \text{ et } \Delta(e) = e}$$

9. Soient $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $x \in \mathbb{N}$. On a :

   $$\Delta(I(f))(x) = I(f)(x+1) - I(f)(x)$$

   On distingue deux cas.
   ⋆ **Premier cas :** $x = 0$
   On a :

   $$\Delta(I(f))(0) = I(f)(1) - \underbrace{I(f)(0)}_{=0} = f(0)$$

   ⋆ **Deuxième cas :** $x \in \mathbb{N}^*$
   Par définition de $I(f)$, on a ici :

   $$\Delta(I(f))(x) = \sum_{k=0}^{x} f(k) - \sum_{k=0}^{x-1} f(k) = f(x)$$

   On peut donc conclure que :

   $$\boxed{\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \qquad \Delta(I(f)) = f}$$

10. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On sait que $I(\Delta(f))(0) = 0$ et, pour tout $x \in \mathbb{N}^*$, on a :

    $$I(\Delta(f))(x) = \sum_{k=0}^{x-1} \Delta(f)(k) = \sum_{k=0}^{x-1} (f(k+1) - f(k)) = f(x) - f(0)$$

    Remarquons que cette égalité reste valable si $x = 0$. On peut donc conclure que :

    $$\boxed{\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \qquad I(\Delta(f)) = f - f(0)}$$

    où $f(0)$ désigne ici la fonction constante égale à 1 sur $\mathbb{N}$.

11. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On utilise un raisonnement par analyse-synthèse pour déterminer les primitives de f, ainsi que celle qui s'annule en 0.

- ⋆ **Analyse :** supposons que $F \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ soit une primitive de f. On a alors $\Delta(F) = f$ puis $I(\Delta(F)) = I(f)$ *i.e.*, en utilisant la question 10., $F - F(0) = I(f)$. Ainsi, $F = F(0) + I(f)$. Ainsi, on a montré que si F est une primitive de f, alors il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $F = y + I(f)$. De plus, si $F(0) = 0$, alors $F = I(f)$. On vient également de démontrer l'unicité d'une primitive de f s'annulant en 0 en cas d'existence.
- ⋆ **Synthèse :** On sait que $I(f)(0) = 0$ et que $\Delta(I(f)) = f$ (question 9.) donc $I(f)$ est une primitive de f s'annulant en 0.

  Soit maintenant $y \in \mathbb{R}$ et posons $F = y + I(f)$. En utilisant les questions 4., 7. et 9., on a :

$$\Delta(f) = \Delta(y) + \Delta(I(f)) = 0 + f = f$$

  Ainsi, F est une primitive de f.

Finalement :

$$\boxed{\text{toute fonction } f \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ possède une unique primitive s'annulant en 0 et on a } \mathscr{P}_f = \left\{ y + I(f) \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\}}$$

12. Soient $m \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$I(f_m)(x) = \sum_{k=0}^{x-1} f_m(k) = \sum_{k=0}^{x-1} k^{\underline{m}}$$

et cette égalité reste valable pour $x = 0$ (car $I(f_m)(0) = 0$ et car une somme portée par l'ensemble vide est nulle par convention). Ainsi

$$\boxed{\mathscr{P}_{f_m} = \left\{ x \in \mathbb{N} \longmapsto y + \sum_{k=0}^{x-1} k^{\underline{m}} \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\}}$$

13. Soit $(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

   (a) D'après la question précédente, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^{\underline{m}} = I(f_m)(n)$. D'après la question 5., on sait que $\Delta(f_{m+1}) = (m+1) f_m$ (car $m + 1 \in \mathbb{N}^*$). En divisant par $m + 1 \neq 0$ et en utilisant la question 7., on a :

$$\Delta\left(\frac{1}{m+1} f_{m+1}\right) = f_m$$

   On en déduit (en utilisant cette fois la question 10.) que :

$$\begin{aligned} I(f_m)(n) = I\left(\Delta\left(\frac{1}{m+1} f_{m+1}\right)\right)(n) &= \frac{1}{m+1} f_{m+1}(n) - \underbrace{\frac{1}{m+1} f_{m+1}(0)}_{=0 \text{ car } 0<m+1} \\ &= \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1} \end{aligned}$$

   Ainsi :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} k^{\underline{m}} = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}}$$

   (b) L'égalité obtenue à la question précédente pour $m = 1$ nous donne :

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^{\underline{1}} = \frac{n^{\underline{2}}}{2}$$

   Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $k^{\underline{1}} = 1$ et :

$$n^{\underline{2}} = \prod_{k=0}^{1} (n - k) = n(n-1)$$

   On retrouve donc bien l'égalité classique :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}}$$

On utilise maintenant la question 13.(a) pour $m = 2$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^{\underline{2}} = \frac{n^{\underline{3}}}{3} \tag{$*$}$$

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $k^{\underline{2}} = k(k-1)$ et :

$$n^{\underline{3}} = \prod_{k=0}^{2} (n-k) = n(n-1)(n-2)$$

donc l'égalité $(*)$ se réécrit :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (k^2 - k) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \sum_{k=0}^{n-1} k + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} &= \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3} \\ &= \frac{n(n-1)}{6}\big(3 + 2(n-2)\big) \end{aligned}$$

On retrouve donc bien que :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}}$$

Partie 4 : nombres de Stirling de seconde espèce

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

Pour $k = 1$, on obtient :

$$\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\}$$

Or on sait que $\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1$ et $\left\{ \begin{matrix} n+1 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 1$ donc on $\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0$. Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = 0}$$

15. D'après la relation vérifiée par les nombres de Stirling de seconde espèce, on a :

$$\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right\} + 2 \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 1 + 2 \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\}$$

Or :

$$\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right\} + 2 \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 1 + 2 \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\}$$

et :

$$\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} + 2 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 1 + 2 \times 1 = 3$$

Finalement :

$$\boxed{\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 1 + 2 \times (1 + 2 \times 3) = 15}$$

16. Soit $x \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence que :

$$\forall x \in \mathbb{N}, \qquad x^m = \sum_{k=0}^{m} \left\{ \begin{matrix} m \\ k \end{matrix} \right\} x^{\underline{k}}$$

⋆ On a :

$$\sum_{k=0}^{m} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ k \end{array} \right\} x^{\underline{0}} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\} x^{\underline{0}} = 1 \times 1 = x^0$$

L'égalité est donc vraie pour $m = 0$.

⋆ Soit $m \in \mathbb{N}$. On suppose que $x^m = \sum_{k=0}^{m} \left\{ \begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right\} x^{\underline{k}}$. Montrons que :

$$x^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \left\{ \begin{array}{c} m+1 \\ k \end{array} \right\} x^{\underline{k}}$$

On a :

$$\begin{aligned} x^{m+1} = x \times x^m &= x \sum_{k=0}^{m} \left\{ \begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right\} x^{\underline{k}} \qquad \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \sum_{k=0}^{m} \left\{ \begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right\} x \times x^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=0}^{m} \left\{ \begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right\} (x-k) x^{\underline{k}} + \sum_{k=0}^{m} \left\{ \begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right\} k x^{\underline{k}} \\ &= \sum_{k=0}^{m} \left\{ \begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right\} x^{\underline{k+1}} + \sum_{k=0}^{m} \left\{ \begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right\} k x^{\underline{k}} \qquad \text{(question 2.)} \\ &= \sum_{\ell=1}^{m+1} \left\{ \begin{array}{c} m \\ \ell-1 \end{array} \right\} x^{\underline{\ell}} + \sum_{k=0}^{m} \left\{ \begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right\} k x^{\underline{k}} \end{aligned}$$

On utilise maintenant la relation vérifiée par les nombres de Stirling de seconde espèce :

$$\begin{aligned} x^{m+1} &= \left\{ \begin{array}{c} m \\ m \end{array} \right\} x^{\underline{m+1}} + \sum_{k=1}^{m} \left[\left\{ \begin{array}{c} m \\ k-1 \end{array} \right\} + k \left\{ \begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right\} \right] x^{\underline{k}} + \left\{ \begin{array}{c} m \\ 0 \end{array} \right\} \times 0 \times x^{\underline{0}} \\ &= x^{\underline{m+1}} + \sum_{k=1}^{m} \left\{ \begin{array}{c} m+1 \\ k \end{array} \right\} x^{\underline{k}} \end{aligned}$$

Or $\left\{ \begin{array}{c} m+1 \\ m+1 \end{array} \right\} = 1$ et $\left\{ \begin{array}{c} m+1 \\ 0 \end{array} \right\} = 0$ donc :

$$x^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \left\{ \begin{array}{c} m+1 \\ k \end{array} \right\} x^{\underline{k}}$$

L'égalité est donc vraie au rang $m+1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall m, x \in \mathbb{N}, \qquad x^m = \sum_{k=0}^{m} \left\{ \begin{array}{c} m \\ k \end{array} \right\} x^{\underline{k}}}$$

17. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} k^m = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{\ell=0}^{m} \left\{ \begin{array}{c} m \\ \ell \end{array} \right\} k^{\underline{\ell}} &= \sum_{\ell=0}^{m} \left\{ \begin{array}{c} m \\ \ell \end{array} \right\} \sum_{k=0}^{n-1} k^{\underline{\ell}} \\ &= \sum_{\ell=0}^{m} \left\{ \begin{array}{c} m \\ \ell \end{array} \right\} \frac{n^{\underline{\ell+1}}}{\ell+1} \end{aligned}$$

en utilisant la question 13.(a). On peut donc conclure que :

$$\boxed{\forall m, n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=0}^{n-1} k^m = \sum_{\ell=0}^{m} \left\{ \begin{array}{c} m \\ \ell \end{array} \right\} \frac{n^{\underline{\ell+1}}}{\ell+1}}$$