

# HOMOGRAPHIES DU PLAN COMPLEXE PRÉSERVANT $\mathbb{U}$

(facultatif)

On note  $\mathbb{U}$  le cercle unité du plan complexe, c'est-à-dire :

$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Soient  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  tels que  $ad - bc \neq 0$ . On appelle *homographie du plan complexe associée à  $(a, b, c, d)$*  l'application  $h$  qui à tout nombre complexe  $z$  tel que  $cz + d \neq 0$  associe le nombre complexe :

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

L'objectif de ce problème est de caractériser les homographies  $h$  du plan complexe, dont le domaine de définition contient  $\mathbb{U}$ , et qui préservent l'ensemble  $\mathbb{U}$ , c'est-à-dire telles que  $h(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$ .

## I – Résultats préliminaires

Dans les trois questions suivantes, nous établissons trois résultats techniques qui seront utiles dans la suite.

1. Établir que pour tous  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , on a :

$$|\alpha + \beta|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2 \operatorname{Re}(\bar{\alpha}\beta)$$

2. Soient  $a, b \in \mathbb{C}$ . Montrer que :

$$\left( \forall \theta \in \mathbb{R}, a + 2 \operatorname{Re}(b e^{-i\theta}) = 0 \right) \implies a = b = 0$$

3. Soient  $a, b \in \mathbb{C}$  tel que  $|a| = |b|$ . Justifier qu'il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que  $a = b e^{i\theta}$ .

## II – Étude de deux familles d'homographies

Soient  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$ . On considère les deux applications  $\varphi_\theta$  et  $\psi_{\alpha,\theta}$  d'expressions :

$$\varphi_\theta(z) = \frac{e^{i\theta}}{z} \quad \text{et} \quad \psi_{\alpha,\theta}(z) = e^{i\theta} \frac{z + \alpha}{\bar{\alpha}z + 1}$$

4. Préciser les ensembles de définition des applications  $\varphi_\theta$  et  $\psi_{\alpha,\theta}$ , notés respectivement  $\mathcal{D}_\theta$  et  $\Delta_{\theta,\alpha}$ . Justifier que les ensembles obtenus contiennent  $\mathbb{U}$ .
5. Montrer que l'application  $\varphi_\theta$  préserve l'ensemble  $\mathbb{U}$  et justifier l'égalité  $\varphi_\theta(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$ .
6. Montrer que l'application  $\psi_{\alpha,\theta}$  préserve l'ensemble  $\mathbb{U}$ .
7. Montrer que :

$$(\psi_{\alpha,\theta})^{-1}(\mathbb{U}) = \mathbb{U},$$

où  $(\psi_{\alpha,\theta})^{-1}(\mathbb{U})$  désigne l'image réciproque de  $\mathbb{U}$  par l'application  $\psi_{\alpha,\theta}$ .

8. (a) Justifier que les applications :

$$\varphi_\theta \circ \varphi_\theta \quad \text{et} \quad \psi_{-\theta, -\alpha e^{i\theta}} \circ \psi_{\theta, \alpha}$$

sont bien définies sur les ensembles  $\mathcal{D}_{\varphi_\theta}$  et  $\Delta_{\psi_{\theta, \alpha}}$  respectivement, puis les calculer.

(b) En déduire que les applications :

$$\varphi_\theta : \mathcal{D}_\theta \longrightarrow \mathcal{D}_\theta \quad \text{et} \quad \psi_{\theta, \alpha} : \Delta_{\theta, \alpha} \longrightarrow \Delta_{-\theta, -\alpha e^{i\theta}}$$

sont bijectives et déterminer leurs applications réciproques.

(c) En déduire l'image directe de  $\mathbb{U}$  par l'application  $\psi_{\theta, \alpha}$ , c'est-à-dire l'ensemble  $\psi_{\theta, \alpha}(\mathbb{U})$ .

### III – Caractérisation des homographies conservant $\mathbb{U}$

Nous souhaitons démontrer dans cette partie que les seules homographies qui préservent l'ensemble  $\mathbb{U}$  sont celles présentées dans la partie I.

Soient  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  tels que  $ad - bc \neq 0$  et  $h$  l'homographie d'expression :

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

On suppose que  $h(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$ .

9. Établir que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad |a|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{a}b e^{-i\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{c}d e^{-i\theta})$$

10. En déduire les relations  $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$  et  $\bar{a}b = \bar{c}d$ .

11. Conclure quant à l'expression de  $h$  si  $a = 0$ .

12. On suppose maintenant que  $a \neq 0$ .

(a) Montrer que  $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$ .

(b) Montrer que  $|a| \neq |c|$ .

(c) Conclure quant à l'expression de l'homographie  $h$ .

On a donc démontré que les homographies du plan complexe qui préservent l'ensemble  $\mathbb{U}$  sont les applications  $\varphi_\theta$  et  $\psi_{\theta, \alpha}$  où  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$ .