Homographies stabilisant $\mathbb{U}_n$

(facultatif)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Dans ce problème, on veut étudier des applications $f : \mathbb{U}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ stabilisant $\mathbb{U}_n$, c'est-à-dire telles que $f(\mathbb{U}_n) \subset \mathbb{U}_n$.

Partie I – Étude d'exemples

1. Pour chacune des applications ci-dessous, déterminer s'il s'agit d'une application stabilisant $\mathbb{U}_n$:

   (a) $f_1 : z \longmapsto \overline{z}$

   (b) $f_2 : z \longmapsto z+1$

   (c) $f_3 : z \longmapsto jz$

   (d) $f_4 : z \longmapsto \dfrac{1}{z}$

   (e) $f_5 : z \longmapsto i$

   (f) $f_6 : z \longmapsto z^3$

   On rappelle que $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.

2. Reprendre la question précédente avec la condition $f(\mathbb{U}_n) = \mathbb{U}_n$.

Dans la suite, on se limitera à certaines fonctions *homographiques*, *i.e.* de la forme :

$$f : z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

où a, b, c et d sont des nombres complexes tels que :

$$\forall z \in \mathbb{U}_n, \qquad cz+d \neq 0$$

Partie II – Stabilisation de $\mathbb{U}$

Soit f une homographie stabilisant $\mathbb{U}_n$ et $a \neq 0$, b, $c \neq 0$ et d des nombres complexes permettant de définir f comme ci-dessus.

3. Justifier que :
$$\forall \omega \in \mathbb{U}_n, \qquad |a\omega + b| = |c\omega + d|$$

4. (a) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Exprimer $|z+z'|^2$ en fonction de $|z|^2$ et $|z'|^2$.

   (b) Montrer que $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et $a\overline{b} = c\overline{d}$.

   (c) En déduire que $|c|^2$ et $|d|^2$ sont solutions de l'équation :
$$z^2 - \big(|a|^2 + |b|^2\big)z + |a|^2|b|^2 = 0$$

   (d) Conclure que :
$$(|a| = |c| \text{ et } |b| = |d|) \qquad \text{ou} \qquad (|a| = |d| \text{ et } |b| = |c|)$$

5. Supposons que $|a| = |c|$ et considérons $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = c\,\mathrm{e}^{i\theta}$. Montrer que $b = d\,\mathrm{e}^{i\theta}$ puis en déduire f.

6. Supposons que $|a| = |d|$.

   (a) Justifier qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = \overline{d}\,\mathrm{e}^{i\theta}$.

   (b) Montrer que $b = \overline{c}\,\mathrm{e}^{i\theta}$, où $\theta \in \mathbb{R}$ est l'un des nombres réels introduit dans la question précédente. En déduire la forme de l'application f.

7. Vérifier que l'application f stabilise $\mathbb{U}$.

Partie III

On considère maintenant l'application :

$$f : z \longmapsto \mathrm{e}^{i\theta} \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}},$$

où $a, b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. On suppose que f stabilise $\mathbb{U}_n$.

8. Montrer que :

$$\forall \omega \in \mathbb{U}_n, \qquad \mathrm{e}^{in\theta}(a\omega + b)^n = (\overline{b}\omega + \overline{a})^n$$

9. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \qquad \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^k = \begin{cases} n & \text{si } n \mid k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

10. En déduire que $ba^{n-1}\,\mathrm{e}^{in\theta} = \overline{a}\left(\overline{b}\right)^{n-1}$.
11. Conclure que $|a| = |b|$.
12. Déterminer f.

Partie IV – Conclusion

Déterminer toutes les fonctions homographiques, au sens de l'énoncé, qui stabilisent $\mathbb{U}_n$.