

INÉGALITÉ DE HARDY

un corrigé

Partie I : inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$.

1. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - 2x_i x_j y_i y_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^2 y_j^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j^2 y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j y_i y_j \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{j=1}^n y_j^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 \sum_{j=1}^n x_j^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{j=1}^n x_j y_j \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n y_j^2 \right) + \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right) - 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j y_j \right) \end{aligned}$$

Comme l'indice de sommation est une variable muette, on peut conclure que :

$$\boxed{\sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = 2 \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right) - 2 \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2}$$

2. Pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $(x_i y_j - x_j y_i)^2 \geq 0$ et une somme de nombres positifs est un nombre positif donc :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \geq 0 \quad i.e. \quad 2 \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right) - 2 \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \geq 0$$

Autrement dit :

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)$$

La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{t^2} = |t|$ donc :

$$\boxed{\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Partie II : inégalité de Hardy

3. (a) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} S_k &= \sum_{\ell=1}^k a_\ell = \sum_{\ell=1}^k \ell(\ell+1) = \sum_{\ell=1}^k (\ell^2 + \ell) = \sum_{\ell=1}^k \ell^2 + \sum_{\ell=1}^k \ell \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{k(k+1)}{2} \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1) + 3k(k+1)}{6} \\ &= \frac{k(k+1)(2k+4)}{6} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad S_k = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}}$$

(b) On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \quad (\text{somme télescopique})\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \frac{n}{n+1}}$$

(c) D'après la question 3.(a), on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{S_k} = \sum_{k=1}^n \frac{3}{(k+1)(k+2)} = 3 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) \quad (\text{somme télescopique}) \\ &= \frac{3n}{2(n+2)}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} - \sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} &= \frac{2n}{n+1} - \frac{3n}{2(n+2)} = \frac{4n(n+2) - 3n(n+1)}{2(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + 5n}{2(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$.

4. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Les nombres $a_1, \dots, a_k$ étant strictement positifs, on peut écrire que :

$$\frac{k(k+1)}{2} = \left| \sum_{\ell=1}^k \ell \right| = \left| \sum_{\ell=1}^k \sqrt{a_\ell} \times \frac{\ell}{\sqrt{a_\ell}} \right|$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (question 2.), on a :

$$\left| \sum_{\ell=1}^k \sqrt{a_\ell} \times \frac{\ell}{\sqrt{a_\ell}} \right| \leq \left(\sum_{\ell=1}^k a_\ell \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\ell=1}^k \frac{\ell^2}{a_\ell} \right)^{\frac{1}{2}}$$

et donc, par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$,

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 \leq \left(\sum_{\ell=1}^k a_\ell \right) \left(\sum_{\ell=1}^k \frac{\ell^2}{a_\ell} \right)}$$

5. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. D'après la question précédente, on a :

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4} \leq S_k \times \sum_{\ell=1}^k \frac{\ell^2}{a_\ell}$$

Les nombres $a_1, \dots, a_k$ sont strictement positifs donc $S_k > 0$. En divisant par $\frac{k(k+1)^2}{4} \times S_k > 0$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient bien :

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \frac{k}{S_k} \leq \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{\ell=1}^k \frac{\ell^2}{a_\ell}}$$

6. Sommons les inégalités obtenues à la question précédente sur les entiers $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{S_k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{\ell=1}^k \frac{\ell^2}{a_\ell}$$

Or :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{\ell=1}^k \frac{\ell^2}{a_\ell} &= \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^k \frac{4}{k(k+1)^2} \times \frac{\ell^2}{a_\ell} = \sum_{1 \leq \ell \leq k \leq n} \frac{4\ell^2}{a_\ell k(k+1)^2} \\ &= \sum_{\ell=1}^n \sum_{k=\ell}^n \frac{4\ell^2}{a_\ell k(k+1)^2} \\ &= 4 \sum_{\ell=1}^n \frac{\ell^2}{a_\ell} \sum_{k=\ell}^n \frac{1}{k(k+1)^2} \end{aligned}$$

en utilisant la linéarité de la somme. Finalement :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \leq 4 \sum_{\ell=1}^n \frac{\ell^2}{a_\ell} \sum_{k=\ell}^n \frac{1}{k(k+1)^2}}$$

7. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{2}{k(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2 - 2k}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2(k+1)^2} \geq 0$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{2}{k(k+1)^2} \leq \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}}$$

8. Soit $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$. D'après la question précédente, on a :

$$\forall k \in \llbracket \ell, n \rrbracket, \quad \frac{1}{k(k+1)^2} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right)$$

donc :

$$\begin{aligned} \sum_{k=\ell}^n \frac{1}{k(k+1)^2} &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=\ell}^n \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\ell^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \quad (\text{somme télescopique}) \\ &\leq \frac{1}{2\ell^2} \end{aligned}$$

En multipliant par $\frac{\ell^2}{a_\ell} \geq 0$, on obtient :

$$\frac{\ell^2}{a_\ell} \sum_{k=\ell}^n \frac{1}{k(k+1)^2} \leq \frac{1}{2a_\ell}$$

En sommant ces inégalités sur les entiers $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$ puis en multipliant par 4 ≥ 0 , on obtient :

$$4 \sum_{\ell=1}^n \frac{\ell^2}{a_\ell} \sum_{k=\ell}^n \frac{1}{k(k+1)^2} \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$$

Cette inégalité et celle obtenue à la question 6. impliquent bien que :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}$$

Partie III : optimalité de la constante 2 dans l'inégalité de Hardy

9. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$e^{h_n} = e^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^n e^{\frac{1}{k}}$$

et on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x$$

Par produit (les nombres mis en jeu sont positifs), on obtient :

$$\prod_{k=1}^n e^{\frac{1}{k}} \geq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e^{h_n} \geq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1 \quad (\text{produit télescopique})$$

Par croissance de la fonction $\ln$ sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h_n = \ln(e^{h_n}) \geq \ln(n + 1)$$

Or $\ln(n + 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison et l'inégalité ci-dessus, on a :

$$\boxed{h_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $a_k = k > 0$ donc, d'après l'hypothèse faite sur λ , on a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \leq \lambda \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$$

i.e. :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{\frac{k(k+1)}{2}} \leq \lambda h_n \quad \text{soit encore} \quad 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \lambda h_n$$

Le changement d'indice $\ell = k + 1$ fournit :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{\ell=2}^{n+1} \frac{1}{\ell} = \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{\ell} - 1 + \frac{1}{n+1} = h_n - 1 + \frac{1}{n+1}$$

La dernière inégalité se réécrit donc :

$$2h_n - 2 + \frac{2}{n+1} \leq \lambda h_n$$

et donc, en divisant par $h_n > 0$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2 - \frac{2}{h_n} + \frac{2}{(n+1)h_n} \leq \lambda$$

D'après la question précédente, on a $2 - \frac{2}{h_n} + \frac{2}{(n+1)h_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$ donc, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient bien que :

$$\boxed{\lambda \text{ est supérieur ou égal à } 2}$$