Inégalité de Hardy

un corrigé

Partie I : inégalité de Cauchy-Schwarz

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$.

1. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - 2 x_i x_j y_i y_j) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^2 y_j^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_j^2 y_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j y_i y_j \\
&= \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{j=1}^n y_j^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 \sum_{j=1}^n x_j^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i \sum_{j=1}^n x_j y_j \\
&= \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right) + \left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right) - 2\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j y_j\right)
\end{aligned}$$

   Comme l'indice de sommation est une variable muette, on peut conclure que :

$$\boxed{\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = 2\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right) - 2\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2}$$

2. Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a $(x_i y_j - x_j y_i)^2 \geqslant 0$ et une somme de nombres positifs est un nombre positif donc :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \geqslant 0 \qquad \textit{i.e.} \qquad 2\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right) - 2\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \geqslant 0$$

   Autrement dit :

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k y_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)$$

   La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\sqrt{t^2} = |t|$ donc :

$$\boxed{\left|\sum_{k=1}^n x_k y_k\right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n y_k^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Partie II : inégalité de Hardy

3. (a) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}
S_k = \sum_{\ell=1}^k a_\ell = \sum_{\ell=1}^k \ell(\ell+1) = \sum_{\ell=1}^k (\ell^2 + \ell) &= \sum_{\ell=1}^k \ell^2 + \sum_{\ell=1}^k \ell \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{k(k+1)}{2} \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 3k(k+1)}{6} \\
&= \frac{k(k+1)(2k+4)}{6}
\end{aligned}$$

   Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad S_k = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}}$$

(b) On a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1} \qquad \text{(somme télescopique)}$$

Ainsi :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = \frac{n}{n+1}}$$

(c) D'après la question 3.(a), on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{S_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{(k+1)(k+2)} = 3 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$
$$= 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) \qquad \text{(somme télescopique)}$$
$$= \frac{3n}{2(n+2)}$$

Ainsi :

$$2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} = \frac{2n}{n+1} - \frac{3n}{2(n+2)} = \frac{4n(n+2) - 3n(n+1)}{2(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{n^2 + 5n}{2(n+1)(n+2)}$$

et donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$.

4. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Les nombres $a_1, \ldots, a_k$ étant strictement positifs, on peut écrire que :

$$\frac{k(k+1)}{2} = \left| \sum_{\ell=1}^{k} \ell \right| = \left| \sum_{\ell=1}^{k} \sqrt{a_\ell} \times \frac{\ell}{\sqrt{a_\ell}} \right|$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (question 2.), on a :

$$\left| \sum_{\ell=1}^{k} \sqrt{a_\ell} \times \frac{\ell}{\sqrt{a_\ell}} \right| \leqslant \left(\sum_{\ell=1}^{k} a_\ell \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\ell=1}^{k} \frac{\ell^2}{a_\ell} \right)^{\frac{1}{2}}$$

et donc, par croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$,

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 \leqslant \left(\sum_{\ell=1}^{k} a_\ell \right) \left(\sum_{\ell=1}^{k} \frac{\ell^2}{a_\ell} \right)}$$

5. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. D'après la question précédente, on a :

$$\frac{k^2(k+1)^2}{4} \leqslant S_k \times \sum_{\ell=1}^{k} \frac{\ell^2}{a_\ell}$$

Les nombres $a_1, \ldots, a_k$ sont strictement positifs donc $S_k > 0$. En divisant par $\frac{k(k+1)^2}{4} \times S_k > 0$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient bien :

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \frac{k}{S_k} \leqslant \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{\ell=1}^{k} \frac{\ell^2}{a_\ell}}$$

6. Sommons les inégalités obtenues à la question précédente sur les entiers $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{S_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{\ell=1}^{k} \frac{\ell^2}{a_\ell}$$

Or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{\ell=1}^{k} \frac{\ell^2}{a_\ell} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{k} \frac{4}{k(k+1)^2} \times \frac{\ell^2}{a_\ell} &= \sum_{1 \leqslant \ell \leqslant k \leqslant n} \frac{4\ell^2}{a_\ell k(k+1)^2} \\
&= \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=\ell}^{n} \frac{4\ell^2}{a_\ell k(k+1)^2} \\
&= 4 \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{a_\ell} \sum_{k=\ell}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2}
\end{aligned}$$

en utilisant la linéarité de la somme. Finalement :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant 4 \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{a_\ell} \sum_{k=\ell}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2}}$$

7. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{2}{k(k+1)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2 - 2k}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2(k+1)^2} \geqslant 0$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{2}{k(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}}$$

8. Soit $\ell \in [\![1, n]\!]$. D'après la question précédente, on a :

$$\forall k \in [\![\ell, n]\!], \qquad \frac{1}{k(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right)$$

donc :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=\ell}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=\ell}^{n} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\ell^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \qquad \text{(somme télescopique)} \\
&\leqslant \frac{1}{2\ell^2}
\end{aligned}$$

En multipliant par $\dfrac{\ell^2}{a_\ell} \geqslant 0$, on obtient :

$$\frac{\ell^2}{a_\ell} \sum_{k=\ell}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{2a_\ell}$$

En sommant ces inégalités sur les entiers $\ell \in [\![1, n]\!]$ puis en multipliant par $4 \geqslant 0$, on obtient :

$$4 \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{a_\ell} \sum_{k=\ell}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$$

Cette inégalité et celle obtenue à la question 6. impliquent bien que :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}$$

Partie III : optimalité de la constante 2 dans l'inégalité de Hardy

9. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\mathrm{e}^{h_n} = \mathrm{e}^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{1}{k}}$$

et on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^{x} \geqslant 1 + x$$

Par produit (les nombres mis en jeu sont positifs), on obtient :

$$\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\frac{1}{k}} \geqslant \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{e}^{h_n} \geqslant \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = n + 1 \qquad \text{(produit télescopique)}$$

Par croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad h_n = \ln\left(\mathrm{e}^{h_n}\right) \geqslant \ln(n+1)$$

Or $\ln(n+1) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ donc, d'après le théorème de comparaison et l'inégalité ci-dessus, on a :

$$\boxed{h_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty}$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $a_k = k > 0$ donc, d'après l'hypothèse faite sur λ, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$$

i.e. :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\frac{k(k+1)}{2}} \leqslant \lambda h_n \qquad \text{soit encore} \qquad 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} \leqslant \lambda h_n$$

Le changement d'indice $\ell = k + 1$ fournit :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{\ell=2}^{n+1} \frac{1}{\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell} - 1 + \frac{1}{n+1} = h_n - 1 + \frac{1}{n+1}$$

La dernière inégalité se réécrit donc :

$$2h_n - 2 + \frac{2}{n+1} \leqslant \lambda h_n$$

et donc, en divisant par $h_n > 0$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 2 - \frac{2}{h_n} + \frac{2}{(n+1)h_n} \leqslant \lambda$$

D'après la question précédente, on a $2 - \dfrac{2}{h_n} + \dfrac{2}{(n+1)h_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 2$ donc, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient bien que :

$$\boxed{\lambda \text{ est supérieur ou égal à } 2}$$