

INÉGALITÉ DE HARDY

(*facultatif*)

L'objectif de ce problème est de démontrer le résultat suivant.

Théorème (inégalité de Hardy)

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$$

Partie I : inégalité de Cauchy-Schwarz

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ sont des nombres réels quelconques.

1. Montrer que :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = 2 \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right) - 2 \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right)^2$$

2. En déduire l'inégalité suivante, appelée *inégalité de Cauchy-Schwarz*¹ :

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Partie II : inégalité de Hardy

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels strictement positifs. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose :

$$S_k = a_1 + \dots + a_k = \sum_{\ell=1}^k a_\ell$$

3. Dans cette question **uniquement**, on suppose que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad a_k = k(k+1)$$

(a) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer S_k .

(b) Calculer la somme $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$.

(c) Montrer alors que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \leq 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$$

1. Augustin Louis CAUCHY (mathématicien français, 1789-1857), Hermann Amandus SCHWARZ (mathématicien allemand, 1843-1921)

On revient ici au cas général : $a_1, \dots, a_n$ désignent des nombres réels strictement positifs quelconques.

4. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 \leq \left(\sum_{\ell=1}^k a_\ell \right) \left(\sum_{\ell=1}^k \frac{\ell^2}{a_\ell} \right)$$

5. En déduire que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \frac{k}{S_k} \leq \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{\ell=1}^k \frac{\ell^2}{a_\ell}$$

6. Montrer alors que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \leq 4 \sum_{\ell=1}^n \frac{\ell^2}{a_\ell} \sum_{k=\ell}^n \frac{1}{k(k+1)^2}$$

7. Justifier que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{2}{k(k+1)^2} \leq \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

8. En déduire l'inégalité de Hardy².

Partie III : optimalité de la constante 2 dans l'inégalité de Hardy

Le but de cette dernière partie est de démontrer que la constante 2 du membre de droite de l'inégalité de Hardy est *optimale*.

On considère ici un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}_+$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{k}{a_1 + \dots + a_k} \leq \lambda \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$$

L'objectif est de montrer qu'on a nécessairement $\lambda \geq 2$.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

(a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad e^{h_n} \geq \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k} \right)$$

(b) En déduire que $h_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

10. En considérant la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad a_k = k,$$

montrer que $\lambda \geq 2$.

2. Godfrey Harold HARDY (1877-1947, mathématicien britannique)