Inégalité de Hardy

(facultatif)

L'objectif de ce problème est de démontrer le résultat suivant.

Théorème (inégalité de Hardy) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$$

Partie I : inégalité de Cauchy-Schwarz

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul et $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ sont des nombres réels quelconques.

1. Montrer que :

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (x_i y_j - x_j y_i)^2 = 2 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \right) - 2 \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right)^2$$

2. En déduire l'inégalité suivante, appelée *inégalité de Cauchy-Schwarz*[1] :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Partie II : inégalité de Hardy

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels strictement positifs. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$S_k = a_1 + \cdots + a_k = \sum_{\ell=1}^{k} a_\ell$$

3. Dans cette question **uniquement**, on suppose que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad a_k = k(k+1)$$

   (a) Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, calculer S_k.

   (b) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$.

   (c) Montrer alors que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$$

1. Augustin Louis Cauchy (mathématicien français, 1789-1857), Hermann Amandus Schwarz (mathématicien allemand, 1843-1921)

On revient ici au cas général : $a_1, \ldots, a_n$ *désignent des nombres réels strictement positifs quelconques.*

4. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{\ell=1}^{k} a_\ell\right)\left(\sum_{\ell=1}^{k} \frac{\ell^2}{a_\ell}\right)$$

5. En déduire que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \frac{k}{S_k} \leqslant \frac{4}{k(k+1)^2} \sum_{\ell=1}^{k} \frac{\ell^2}{a_\ell}$$

6. Montrer alors que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant 4 \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{a_\ell} \sum_{k=\ell}^{n} \frac{1}{k(k+1)^2}$$

7. Justifier que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{2}{k(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

8. En déduire l'inégalité de Hardy [2].

Partie III : optimalité de la constante 2 dans l'inégalité de Hardy

Le but de cette dernière partie est de démontrer que la constante 2 du membre de droite de l'inégalité de Hardy est *optimale*.

On considère ici un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}_+$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1 + \cdots + a_k} \leqslant \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}$$

L'objectif est de montrer qu'on a nécessairement $\lambda \geqslant 2$.

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \mathrm{e}^{h_n} \geqslant \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)$$
   (b) En déduire que $h_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.
10. En considérant la suite $(a_k)_{k \geqslant 1}$ définie par :
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad a_k = k,$$
   montrer que $\lambda \geqslant 2$.

2. Godfrey Harold Hardy (1877-1947, mathématicien britannique)