Inégalité de Fejér-Jackson

(facultatif)

Le but de ce problème est de démontrer l'inégalité de Fejér-Jackson, selon laquelle :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]0, \pi[, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} > 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction :

$$f_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, \pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} \end{array} \right.$$

et on note $(\mathscr{I}_n)$ la propriété :

$$\forall x \in]0, \pi[, \qquad f_n(x) > 0 \tag{$\mathscr{I}_n$}$$

Partie A : trigonométrie

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(2x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.
   (b) En déduire que les assertions $(\mathscr{I}_1)$, $(\mathscr{I}_2)$ et $(\mathscr{I}_3)$ sont vraies.
2. Soit $x \in]0, \pi[$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$
   (b) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Partie B : préliminaires analytiques

3. Dans cette question, on considère des nombres réels a, b tels que $a < b$ et $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$. On suppose de plus que f' s'annule en exactement r points de $[a, b]$, où $r \in \mathbb{N}^*$. On note $x_1, \ldots, x_r$ ces points, rangés dans l'ordre croissant, *i.e.* tels que $x_1 < x_2 < \cdots < x_r$. On pose $x_0 = a$ et $x_{r+1} = b$.
   Remarque : on notera qu'on peut éventuellement avoir $x_0 = x_1$ ou $x_r = x_{r+1}$ dans le cas où f' s'annule en a ou en b.
   (a) Justifier que pour tout $i \in [\![0, r]\!]$, la fonction f est strictement monotone sur $[x_i, x_{i+1}]$.
   (b) En déduire que f possède un minimum m sur $[a, b]$, atteint en l'un des x_i, où $i \in [\![0, r+1]\!]$, et que :
   $$\forall x \in [a, b],\ x \notin \{x_0, x_1, \ldots, x_{r+1}\} \implies f(x) > m$$

Partie C : démonstration de l'inégalité de Fejér-Jackson

On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité $(\mathscr{I}_n)$ est vraie. La propriété a déjà été initialisée à la question 1.(b).

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on suppose que la proposition $(\mathscr{I}_{n-1})$ est vraie.

4. Justifier que la fonction f_n est dérivable sur $[0, \pi]$ et exprimer sa dérivée sous forme d'une somme.
5. Soit $\theta \in]0, \pi[$ tel que $f_n'(\theta) = 0$.
   (a) À l'aide de la question 2., montrer que $\sin\left(n\theta + \frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
   (b) En déduire que $\sin(n\theta) = 0$ ou que $\sin(n\theta) = \sin(\theta)$.
   (c) Montrer alors que $f_n(\theta) \geqslant f_{n-1}(\theta)$.
6. Montrer que la fonction f_n' s'annule un nombre fini de fois sur $[0, \pi]$.
7. En utilisant la partie B, conclure que $(\mathscr{I}_n)$ est vraie.