Un problème de divisibilité

(facultatif)

Le but de ce problème est de démontrer le résultat suivant, qui fait l'objet d'une question posée dans la RMS (Revue des Mathématiques Spéciales).

Théorème Pour tous $n, q \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$n\,! \mid \prod_{k=0}^{n-1} (q^n - q^k)$$

Pour tous $n, q \in \mathbb{N}^*$, on pose dans la suite :

$$P_{n,q} = \prod_{k=0}^{n-1} (q^n - q^k)$$

La lettre $\mathscr{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
Si E est un ensemble fini, on pourra noter $\mathrm{Card}(E)$ le nombre d'éléments de E, appelé *cardinal* de E.
On admettra que si F est un sous-ensemble de E, alors $E \setminus F$ est un ensemble fini de cardinal :

$$\mathrm{Card}(E \setminus F) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(F)$$

Partie A : formule de Legendre

On rappelle que, si p est un nombre premier, alors la valuation p-adique d'un entier $a \in \mathbb{N}^*$ est définie par :

$$v_p(a) = \max\left\{k \in \mathbb{N} \,\middle|\, p^k \mid a\right\}$$

En vertu du théorème des nombres premiers, on a la décomposition suivante :

$$\forall a \in \mathbb{N}^*, \qquad a = \prod_{p \in \mathscr{P}} p^{v_p(a)}$$

1. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathscr{P}$. Montrer que $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$.
2. Montrer que :
$$\forall a, b \in \mathbb{N}^*, \qquad a \mid b \iff (\forall p \in \mathscr{P},\ v_p(a) \leqslant v_p(b))$$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathscr{P}$. On pose $N_p = \left\lfloor \dfrac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor$.

3. Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ k > N_p \implies \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$$
4. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Calculer le nombre de multiples de m appartenant à l'ensemble $[\![1, n]\!]$.

5. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathscr{A}_k = \{\ell \in [\![1, n]\!] \mid v_p(\ell) = k\}$. Montrer que :

$$\operatorname{Card}(\mathscr{A}_k) = \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor$$

Calculer le cardinal de l'ensemble $\mathscr{A}_k$.

6. En déduire que :

$$v_p(n\,!) = \sum_{k=1}^{N_p} k \left(\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor \right)$$

puis que :

$$v_p(n\,!) = \sum_{k=1}^{N_p} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \qquad \text{(formule de Legendre)}$$

7. *Applications*
   (a) Calculer le nombre zéros par lequel se termine le nombre $2024\,!$.
   (b) i. Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$$

   ii. En déduire que :

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, \qquad \frac{(2a)\,!\,(2b)\,!}{a\,!\,b\,!\,(a+b)\,!} \in \mathbb{N}$$

Partie B : démonstration du théorème

8. Soient $p \in \mathscr{P}$ et $a \in \mathbb{N} \setminus (p\mathbb{Z})$. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad a^{p^k - p^{k-1}} \equiv 1\,[p^k]$$

9. Montrer que :

$$\forall n, q \in \mathbb{N}^*, \qquad P_{n,q} = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^{n} (q^k - 1)$$

10. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathscr{P}$.
   (a) *On suppose que p est un facteur premier de q.*
   i. Justifier que $v_p(P_{n,q}) = \dfrac{n(n-1)}{2} v_p(q)$.
   ii. En utilisant la formule de Legendre, montrer que $v_p(n\,!) \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.
   iii. Conclure que $v_p(n\,!) \leqslant v_p(P_{n,q})$.
   (b) *On suppose que p n'est pas un facteur premier de q.*
   i. En utilisant la question 8., montrer que :

$$\forall k, \ell \in \mathbb{N}^*, \qquad p^k - p^{k-1} \mid \ell \implies p^k \mid q^\ell - 1$$

   ii. Déterminer un entier $M_p \in \mathbb{N}^*$ tel que $p^{M_p} - p^{M_p - 1} > n$.
   iii. Montrer alors que :

$$v_p(P_{n,q}) \geqslant \sum_{k=1}^{M_p} k \left(\left\lfloor \frac{n}{p^k - p^{k-1}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1} - p^k} \right\rfloor \right)$$

   puis, en calculant la somme ci-dessus, que :

$$v_p(P_{n,q}) \geqslant \sum_{k=1}^{M_p} \left\lfloor \frac{n}{p^k - p^{k-1}} \right\rfloor$$

   iv. En déduire que $v_p(n\,!) \leqslant v_p(P_{n,q})$.

11. Démontrer le théorème.