Théorème de Cantor-Bernstein

un corrigé

Partie I – Démonstration d'un premier résultat

1. Soit $(A_i)_{i\in I} \in \mathscr{P}(E)^I$. Pour tout $j \in I$, on a $A_j \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ et l'application H est croissante pour l'inclusion donc :
$$\forall j \in I, \qquad H(A_j) \subset H\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)$$
On en déduit que :
$$\boxed{\bigcup_{j\in I} H(A_j) \subset H\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)}$$

2. L'ensemble vide $\varnothing$ est une partie de E. De plus, comme $H(\varnothing)$ est une partie de E, on a $\varnothing \subset H(\varnothing)$ (on sait en effet que pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, on a $\varnothing \subset X$). Ceci démontre que $\varnothing \in \mathscr{S}$. Ainsi :
$$\boxed{\text{l'ensemble } \mathscr{S} \text{ est non vide}}$$

3. (a) Tout d'abord, M est une partie de E (une réunion quelconque de parties de E est une partie de E). On doit maintenant montrer que $M \subset H(M)$. On sait que :
$$\forall A \in \mathscr{S}, \qquad A \subset H(A)$$
donc :
$$M = \bigcup_{A\in\mathscr{S}} A \subset \bigcup_{A\in\mathscr{S}} H(A)$$
D'après la question 1., on sait aussi que :
$$\bigcup_{A\in\mathscr{S}} H(A) \subset H\left(\bigcup_{A\in\mathscr{S}} A\right)$$
donc, par transitivité de la relation $\subset$, on a bien $M \subset H(M)$. Finalement :
$$\boxed{M \text{ appartient à } \mathscr{S}}$$
(b) On sait que $M \subset H(M)$. Par croissance de l'application H, on a $H(M) \subset H(H(M))$, ce qui démontre que $H(M)$ est un élément de $\mathscr{S}$. Par conséquent :
$$H(M) \subset \bigcup_{A\in\mathscr{S}} A \qquad \textit{i.e.} \qquad H(M) \subset M$$
Nous avons donc les deux inclusions $M \subset H(M)$ et $H(M) \subset M$. Par double inclusion, on peut conclure que :
$$\boxed{H(M) = M}$$

Partie II – Démonstration d'un deuxième résultat

4. Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$ tels que $A \subset B$. Montrons que :
$$\overline{f}(A) \subset \overline{f}(B) \qquad \textit{i.e.} \text{ que} \qquad f(A) \subset f(B)$$
Soit $x \in f(A)$. Par définition de l'image directe d'un ensemble par une application, il existe $a \in A$ tel que $x = f(a)$. Or $A \subset B$ et $a \in A$ donc $a \in B$. À nouveau par définition de l'image directe d'un ensemble par une application, on en déduit que $f(a) \in f(B)$, *i.e.* que $x \in f(B)$. Ceci démontre l'inclusion $f(A) \subset f(B)$. Le raisonnement étant exactement le même pour l'application $\overline{g}$, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{les applications } \overline{f} \text{ et } \overline{g} \text{ sont croissantes pour l'inclusion}}$$

5. Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$. On suppose que $A \subset B$. D'après la question précédente, on a $f(A) \subset f(B)$. Montrons alors que :
$$F \setminus f(B) \subset F \setminus f(A),$$
i.e. que :
$$\forall x \in F,\ (x \notin f(B)) \implies (x \notin f(A))$$
D'après le principe de contraposition, cette dernière assertion est équivalente à :
$$\forall x \in F,\ (x \in f(A)) \implies (x \in f(B))$$
Celle-ci est vraie car on sait que $f(A) \subset f(B)$. On peut donc conclure que :
$$\boxed{\text{l'application } \overline{f_0} \text{ est décroissante pour l'inclusion (et il en est de même pour } \overline{g_0})}$$

6. Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$. On suppose que $A \subset B$.
   - ⋆ Comme f est croissante pour l'inclusion, la question 5. nous donne l'inclusion $\overline{f_0}(B) \subset \overline{f_0}(A)$, *i.e.* $F \setminus f(B) \subset F \setminus f(A)$.
   - ⋆ La fonction $\overline{g_0}$ est également décroissante pour l'inclusion donc la dernière inclusion nous donne $\overline{g_0}(F \setminus f(A)) \subset \overline{g_0}(F \setminus f(B))$. Autrement dit :
$$E \setminus g(F \setminus f(A)) \subset E \setminus g(F \setminus f(B)) \qquad \text{soit encore} \qquad H(A) \subset H(B)$$

   Finalement :
$$\boxed{\text{l'application } H \text{ est croissante pour l'inclusion}}$$

Partie III – Démonstration du théorème de Cantor-Bernstein

7. L'application $H \in \mathscr{P}(E)^{\mathscr{P}(E)}$ est croissante pour l'inclusion (*cf.* question 6.) donc la partie I nous permet de conclure que :
$$\boxed{\exists\, M \in \mathscr{P}(E),\ H(M) = M}$$

8. Par construction, l'application $\tilde{g}$ est surjective (pour tout $y \in g(F)$, il existe $x \in F$ tel que $y = g(x) = \tilde{g}(x)$) et elle est injective puisque l'application g l'est :
$$\forall x, x' \in F, \qquad \tilde{g}(x) = \tilde{g}(x') \iff g(x) = g(x') \iff x = x'$$
Ainsi :
$$\boxed{\text{l'application } \tilde{g} \text{ est bijective}}$$

9. Soit $B \in \mathscr{P}(F)$. Montrons que $g(F \setminus B) = g(F) \setminus g(B)$ en raisonnant par double inclusion.
   - ⋆ Soit $y \in g(F) \setminus g(B)$. Il existe $x \in F$ tel que $y = g(x)$. Si $x \in B$, alors $y = g(x) \in g(B)$, ce qui est absurde. On en déduit que $x \in F \setminus B$. Ainsi, $y = g(x) \in g(F \setminus B)$. Ceci démontre l'inclusion $g(F) \setminus g(B) \subset g(F \setminus B)$.
   - ⋆ Soit $y \in g(F \setminus B)$. Il existe $x \in F \setminus B$ tel que $y = g(x)$. Il s'agit de montrer que $g(x) \notin g(B)$. Par l'absurde, si $g(x) \in g(B)$, alors il existe $b \in B$ tel que $g(x) = g(b)$ et donc, comme g est injective, on en déduit que $x = b \in B$, ce qui est absurde. Ainsi, $y = g(x) \in g(F) \setminus g(B)$. Ceci démontre l'inclusion $g(F \setminus B) \subset g(F) \setminus g(B)$.

   On a donc bien l'égalité $g(F \setminus B) = g(F) \setminus g(B)$. Finalement :
$$\boxed{\forall B \in \mathscr{P}(F), \qquad g(F \setminus B) = g(F) \setminus g(B)}$$

10. On sait que :
$$M = H(M) = E \setminus g(F \setminus f(M)) \qquad \text{ce que l'on peut réécrire} \qquad E \setminus M = g(F \setminus f(M))$$
Or $F \setminus f(M) \subset F$ et $\overline{g}$ est croissante pour l'inclusion donc $g(F \setminus f(M)) \subset g(F)$. Ainsi :
$$\boxed{E \setminus M \subset g(F)},$$
ce qu'il fallait démontrer.

11. Tout d'abord, l'application h est bien définie. En effet, si $x \in E \setminus M$, alors x appartient bien au domaine de définition de $(\tilde{g})^{-1}$, à savoir $g(F)$ d'après la question précédente. On étudie ensuite séparément l'injectivité et la surjectivité.

   ⋆ Soient $x, x' \in E$. On suppose que $h(x) = h(x')$. Montrons que $x = x'$. On distingue trois cas.

   — **Premier cas :** $x, x' \in M$
   Dans ce cas, l'égalité $h(x) = h(x')$ se réécrit $f(x) = f(x')$ et donc $x = x'$ car f est une application injective sur E (donc sur M).

   — **Deuxième cas :** $x \in M$ et $x' \in E \setminus M$
   L'égalité $h(x) = h(x')$ se réécrit $f(x) = (\tilde{g})^{-1}(x')$. Par définition de M et de H, on a :

$$M = H(M) = E \setminus g(F \setminus f(M)) \qquad \text{donc} \qquad \begin{aligned} E \setminus M &= g(F \setminus f(M)) \\ &= g(F) \setminus g(f(M)) \end{aligned}$$

   d'après la question 9. On a $x' \in E \setminus M$ donc il existe $y \in F$ tel que $x' = g(y)$. De plus, pour tout $m \in M$, on a $x' \neq g(f(m))$ (car $x' \notin g(f(M))$). En particulier, $x' \neq g(f(x))$ *i.e.* $g(y) \neq g(f(x))$. Par conséquent, $y \neq f(x)$. On en déduit que :

$$h(x') = (\tilde{g})^{-1}(x') = (\tilde{g})^{-1}(g(y)) = y$$

   Par conséquent, $h(x) = f(x) \neq y$ *i.e.* $h(x) \neq h(x')$. Il n'est donc en fait pas possible de trouver $x \in M$ et $x' \in E \setminus M$ tels que $h(x) = h(x')$.

   — **Troisième cas :** $x, x' \in E \setminus M$
   L'égalité $h(x) = h(x')$ se réécrit $(\tilde{g})^{-1}(x) = (\tilde{g})^{-1}(x')$. Or $(\tilde{g})^{-1}$ est la bijection réciproque de $\tilde{g}$ donc $(\tilde{g})^{-1}$ est en particulier injective. Ainsi, $x = x'$.

   On peut donc conclure que h est injective.

   ⋆ Soit $y \in F$. Montrons qu'il existe $x \in E$ tel que $y = h(x)$ en distinguant deux cas.

   — **Premier cas :** $y \in f(M)$
   Il existe $m \in M$ tel que $y = f(m)$ donc m est antécédant de y par h dans M (et donc dans E).

   — **Deuxième cas :** $y \in E \setminus f(M)$
   On sait que $E \setminus M = g(F \setminus f(M))$ donc $g(y) \in E \setminus M$ donc :

$$h(g(y)) = (\tilde{g})^{-1}(g(y)) = y$$

   Ainsi, $g(y)$ est un antécédent de y par l'application h dans E.

   Finalement, h est surjective.

   On peut donc conclure que :

$$\boxed{\text{l'application } h \text{ est une bijection de } E \text{ sur } F}$$