Théorème de Cantor-Bernstein

(facultatif)

L'objectif est de démontrer le résultat suivant.

> **Théorème (de Cantor-Bernstein)** Soient E et F deux ensembles quelconques. On suppose qu'il existe des applications injectives $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$. Il existe alors une application $h : E \longrightarrow F$ bijective.

Partie I – Démonstration d'un premier résultat

On considère dans cette partie un ensemble non vide quelconque E et une application $H \in \mathscr{P}(E)^{\mathscr{P}(E)}$ *croissante pour l'inclusion*, *i.e.* telle que :

$$\forall A, B \in \mathscr{P}(E), \qquad A \subset B \implies H(A) \subset H(B)$$

Nous allons démontrer que l'application H admet un point fixe dans $\mathscr{P}(E)$, *i.e.* que :

$$\exists\, M \in \mathscr{P}(E),\ H(M) = M$$

On considère l'ensemble :

$$\mathscr{S} = \big\{ A \in \mathscr{P}(E) \,\big|\, A \subset H(A) \big\}$$

1. Soit $(A_i)_{i \in I} \in \mathscr{P}(E)^I$ une famille de parties de E. Montrer que :

$$\bigcup_{i \in I} H(A_i) \subset H\left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)$$

2. Justifier que $\mathscr{S}$ est une partie non vide de $\mathscr{P}(E)$.
3. On considère l'ensemble $M = \displaystyle\bigcup_{A \in \mathscr{S}} A$.
   (a) Montrer que $M \in \mathscr{S}$.
   (b) Montrer que $H(M) = M$.

Partie II – Démonstration d'un deuxième résultat

Soient E et F deux ensembles et des applications $f \in F^E$ et $g \in E^F$. On définit les applications :

$$\overline{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(F) \\ A & \longmapsto & f(A) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \overline{g} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(F) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ B & \longmapsto & g(B) \end{array} \right.$$

4. Montrer que les applications $\overline{f}$ et $\overline{g}$ sont croissantes pour l'inclusion.
5. Qu'en est-il des applications suivantes ?

$$\overline{f_0} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(F) \\ A & \longmapsto & F \setminus f(A) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \overline{g_0} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(F) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ B & \longmapsto & E \setminus g(B) \end{array} \right.$$

6. Montrer que l'application :

$$H : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ A & \longmapsto & E \setminus g(F \setminus f(A)) \end{array} \right.$$

est croissante pour l'inclusion.

Partie III – Démonstration du théorème de Cantor-Bernstein

Soient E et F deux ensembles et $f \in F^E$, $g \in E^F$ deux applications injectives.

7. Justifier qu'il existe $M \in \mathscr{P}(E)$ telle que $H(M) = M$, l'application H étant celle de la question 6.
8. Montrer que l'application :

$$\tilde{g} : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & g(F) \\ x & \longmapsto & g(x) \end{array} \right.$$

est bijective.

9. Montrer que :

$$\forall B \in \mathscr{P}(F), \qquad g(F \setminus B) = g(F) \setminus g(B)$$

10. Démontrer que :

$$\forall x \in E \setminus M, \qquad x \in g(F)$$

11. Démontrer que l'application :

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{cl} f(x) & \text{si } x \in M \\ (\tilde{g})^{-1}(x) & \text{si } x \in E \setminus M \end{array} \right. \end{array} \right.$$

est bijective.