Théorème de Beatty

un corrigé

1. Soit $a \in]1, +\infty[$.

(a) Soient $k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $k \neq \ell$. Quitte à échanger les rôles joués par k et ℓ, on peut supposer que $k > \ell$. On a :

$$\lfloor ka \rfloor > ka - 1 \qquad \text{et} \qquad \lfloor \ell a \rfloor \leqslant \ell a \qquad \text{donc} \qquad \lfloor ka \rfloor - \lfloor \ell a \rfloor > (k-\ell)a - 1$$

Or $k > \ell$ et k, ℓ sont des entiers donc $k - \ell \geqslant 1$. Par ailleurs $a > 1$ donc $(k-\ell)a \geqslant a > 1$. On en déduit que $\lfloor ka \rfloor - \lfloor \ell a \rfloor > 0$. En particulier, $\lfloor ka \rfloor \neq \lfloor \ell a \rfloor$. Ainsi :

$$\boxed{\forall k, \ell \in \mathbb{N},\ k \neq \ell \implies \lfloor ka \rfloor \neq \lfloor \ell a \rfloor}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $p = \max\left(\left\{k \in \mathbb{N} \,\middle|\, \lfloor ka \rfloor \leqslant n\right\}\right)$.

- ⋆ En particulier, p appartient à l'ensemble $\left\{k \in \mathbb{N} \,\middle|\, \lfloor ka \rfloor \leqslant n\right\}$ (par définition du maximum) donc $\lfloor pa \rfloor \leqslant n$. Or $pa - 1 < \lfloor pa \rfloor$ donc $pa < n+1$. En divisant par $a > 0$, on obtient l'inégalité $p < \dfrac{n+1}{a}$.
- ⋆ Par définition de p, on a $p+1 \notin \left\{k \in \mathbb{N} \,\middle|\, \lfloor ka \rfloor \leqslant n\right\}$ donc $\lfloor (p+1)a \rfloor > n$. Or $\lfloor (p+1)a \rfloor$ et n sont des entiers donc $\lfloor (p+1)a \rfloor \geqslant n+1$. On sait que $\lfloor (p+1)a \rfloor \leqslant (p+1)a$ donc l'inégalité précédente entraîne que $n+1 \leqslant (p+1)a$. En divisant par $a > 0$ puis en soustrayant 1, on obtient l'inégalité $p \geqslant \dfrac{n+1}{a} - 1$.

Finalement :

$$\boxed{\frac{n+1}{a} - 1 \leqslant p < \frac{n+1}{a}}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant a$. On pose $p = \max\left(\left\{k \in \mathbb{N} \,\middle|\, \lfloor ka \rfloor \leqslant n\right\}\right)$. Remarquons tout d'abord que :

$$\lfloor 1 \times a \rfloor = \lfloor a \rfloor \leqslant a \leqslant n$$

donc $1 \in \left\{k \in \mathbb{N} \,\middle|\, \lfloor ka \rfloor \leqslant n\right\}$. Par définition de p, on a alors $p \geqslant 1$. On en déduit que :

$$[\![1, n]\!] \cap E_a = \left\{i \in E_a \,\middle|\, i \leqslant n\right\} = \left\{\lfloor ka \rfloor \,\middle|\, k \in [\![1, p]\!]\right\}$$

Les éléments de cet ensemble sont deux à deux distincts d'après la première question donc :

$$\mathrm{Card}\left([\![1, n]\!] \cap E_a\right) = p$$

La question précédente nous donne les inégalités souhaitées :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad n \geqslant a \implies \left(\frac{n+1}{a} - 1 \leqslant x_n(a) < \frac{n+1}{a}\right)}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant a$. On a (d'après la question précédente) :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{an} - \frac{1}{n} \leqslant \frac{x_n(a)}{n} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{an}$$

Or :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{an} - \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{a} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{an} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{a}$$

donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\text{la suite } \left(\frac{x_n(a)}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est convergente de limite } \frac{1}{a}}$$

2. Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que les ensembles E_p et E_q forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme E_p et E_q forment une partition de $\mathbb{N}^*$, on a $E_p \cup E_q = \mathbb{N}^*$. On en déduit que :

   $$[\![1, n]\!] = [\![1, n]\!] \cap \mathbb{N}^* = [\![1, n]\!] \cap (E_p \cup E_q) = ([\![1, n]\!] \cap E_p) \cup ([\![1, n]\!] \cap E_q)$$

   Or E_p et E_q forment une partition de $\mathbb{N}^*$ donc $E_p \cap E_q = \varnothing$. On en déduit que :

   $$([\![1, n]\!] \cap E_p) \cap ([\![1, n]\!] \cap E_q) = \varnothing$$

   La formule donnant le cardinal d'une réunion disjointe d'ensembles finis nous donne alors :

   $$n = \operatorname{Card}\big([\![1, n]\!]\big) = \operatorname{Card}\big([\![1, n]\!] \cap E_p\big) + \operatorname{Card}\big([\![1, n]\!] \cap E_q\big)$$

   Autrement dit :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad n = x_n(p) + x_n(q) \qquad i.e. \qquad 1 = \frac{x_n(p)}{n} + \frac{x_n(q)}{n}$$

   Or $\dfrac{x_n(p)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{1}{p}$ et $\dfrac{x_n(q)}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \dfrac{1}{q}$ donc, en faisant tendre n vers $+\infty$, dans l'égalité précédente, il vient :

   $$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1}$$

   (b) On raisonne par l'absurde : supposons que $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Il existe alors $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\dfrac{p}{q} = \dfrac{a}{b}$. Ainsi, $pb = qa$ et donc $\lfloor pb \rfloor = \lfloor qa \rfloor$. Comme a et b sont des entiers naturels non nuls, on en déduit que $\lfloor pb \rfloor \in E_p \cap E_q$. En particulier $E_p \cap E_q \neq \varnothing$, ce qui contredit le fait que E_p et E_q forment une partition de $\mathbb{N}^*$. Ainsi :

   $$\boxed{\text{le nombre } \frac{p}{q} \text{ est irrationnel}}$$

   On a $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ donc $\dfrac{p}{q} = p - 1$. Par l'absurde, si p est rationnel, alors $\dfrac{p}{q} = p - 1$ est rationnel (la différence de deux nombres rationnels étant un nombre rationnel), ce qui est absurde. Ainsi :

   $$\boxed{\text{le nombre } p \text{ est irrationnel}}$$

3. On suppose que p et q sont des nombres strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, le nombre p étant irrationnel.

   (a) Comme $q > 0$, on a $\dfrac{1}{q} > 0$. On en déduit que $\dfrac{1}{p} = 1 - \dfrac{1}{q} < 1$. De plus, $p > 0$ donc $0 < \dfrac{1}{p} < 1$. Par décroissance stricte de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que :

   $$\boxed{p > 1}$$

   Par l'absurde, si q est un nombre rationnel, alors on a aussi $\dfrac{1}{q} \in \mathbb{Q}$ (l'inverse d'un rationnel non nul est un rationnel). Par conséquent, $\dfrac{1}{p} = 1 - \dfrac{1}{q} \in \mathbb{Q}$ (une différence de nombres rationnels est un rationnel), puis $p \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde. Ainsi :

   $$\boxed{q \text{ est un nombre irrationnel}}$$

   (b) Comme p et q sont irrationnel, on a $mp, nq \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Les inégalités liées à la partie entière s'écrivent donc :

   $$mp - 1 < \lfloor mp \rfloor < mp \qquad \text{et} \qquad nq - 1 < \lfloor nq \rfloor < nq,$$

   i.e. :

   $$mp - 1 < k < mp \qquad \text{et} \qquad nq - 1 < k < nq$$

   Or :

   $$k = k \times 1 = k \times \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{k}{p} + \frac{k}{q}$$

   et comme $\dfrac{1}{p}, \dfrac{1}{q} \in \mathbb{R}_+^*$, les inégalités précédentes nous donnent :

   $$m - \frac{1}{p} < \frac{k}{p} < m \qquad \text{et} \qquad n - \frac{1}{q} < \frac{k}{q} < n$$

En sommant ces inégalités, il vient :

$$m + n - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) < \underbrace{\frac{k}{p} + \frac{k}{q}}_{=k} < m + n$$

Comme $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, on peut conclure que :

$$\boxed{m + n - 1 < k < m + n}$$

L'entier $m+n$ est le successeur de l'entier $m+n-1$. L'intervalle $]m+n-1, m+n[$ ne peut donc pas contenir d'entier (k ici). Ainsi :

$$\boxed{E_p \cap E_q = \varnothing}$$

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $i = \left\lfloor \dfrac{k}{p} \right\rfloor$ et $j = \left\lfloor \dfrac{k}{q} \right\rfloor$.

i. On suppose que $k \notin E_p$, *i.e.* que :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \qquad k \neq \lfloor \ell p \rfloor$$

Par définition de i, on a :

$$i \leqslant \frac{k}{p} < i + 1 \qquad \text{donc} \qquad ip \leqslant k < (i+1)p$$

- ⋆ Par l'absurde, si $k = ip$ alors $i \neq 0$ car $k \neq 0$ et donc $p = \dfrac{k}{i} \in \mathbb{Q}$, ce qui est exclu. Ainsi, $k \neq ip$, *i.e.* $ip < k$.
- ⋆ Par l'absurde, si $(i+1)p - 1 \leqslant k < (i+1)p$ alors $k < (i+1)p \leqslant k+1$. Or $(i+1)p$ n'est pas un entier (puisque p est irrationnel) donc $\lfloor (i+1)p \rfloor = k$. Ainsi, $k \in E_p$ (car $i + 1 \in \mathbb{N}^*$), ce qui est exclu.

Par conséquent :

$$\boxed{\text{si } k \notin E_p, \text{ alors } ip < k < ip + p - 1}$$

ii. On suppose que $k \notin E_p \cup E_q$. Autrement dit, $k \notin E_p$ et $k \notin E_q$. D'après la question précédente, on a :

$$ip < k < ip + p - 1 \qquad \text{et} \qquad jq < k < jq + q - 1,$$

le raisonnement étant analogue pour le deuxième encadrement. Or $k = \dfrac{k}{p} + \dfrac{k}{q}$ et (en divisant par $1/p > 0$ ou $1/q > 0$) :

$$i < \frac{k}{p} < i + 1 - \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad j < \frac{k}{q} < j + 1 - \frac{1}{q}$$

En sommant les inégalités, il vient :

$$i + j < k < i + j + 2 - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{si } k \notin E_p \cup E_q, \text{ alors } i + j < k < i + j + 1}$$

iii. Montrons que $E_p \cup E_q = \mathbb{N}^*$ en raisonnant par double inclusion.

— Comme E_p et E_q sont des parties de $\mathbb{N}^*$, on a $E_p \cup E_q \subset \mathbb{N}^*$.

— Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par l'absurde, si $k \notin E_p \cup E_q$, alors k est un entier appartenant à l'intervalle $]i+j, i+j+1[$ ce qui est absurde (en effet, $i+j$ et $i+j+1$ sont des entiers et $i+j+1$ est le successeur de $i+j$). Ainsi, $k \in E_p \cup E_q$. On a donc l'inclusion $\mathbb{N}^* \subset E_p \cup E_q$.

Finalement :

$$\boxed{E_p \cup E_q = \mathbb{N}^*}$$

4. (a) On a $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. On utilise le théorème de Beatty.

⋆ Tout d'abord, φ est irrationnel car si $\varphi \in \mathbb{Q}$, alors $\sqrt{5} = 2\varphi - 1 \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde [1].

1. La démonstration du fait que $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ est la même que celle menée dans le chapitre 2 pour $\sqrt{2}$.

⋆ De plus, $\varphi^2 = \varphi + 1$ donc, en divisant par $\varphi^2 \neq 0$ on obtient $1 = \dfrac{1}{\varphi} + \dfrac{1}{\varphi^2}$.

D'après le théorème de Beatty, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{les ensembles } E_\varphi \text{ et } E_{\varphi^2} \text{ forment une partition de } \mathbb{N}^*}$$

(b) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ tels que les ensembles E_a et E_a^2 forment une partition de $\mathbb{N}^*$. D'après le théorème de Beatty, on a :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = 1 \qquad \textit{i.e.} \qquad \frac{a+1}{a^2} = 1 \qquad \text{soit encore} \qquad a + 1 = a^2$$

On en déduit que $a \in \left\{ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$ et comme $a > 0$, on a nécessairement :

$$\boxed{a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi}$$