

THÉORÈME DE BEATTY

un corrigé

1. Soit $a \in]1, +\infty[$.

(a) Soient $k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $k \neq \ell$. Quitte à échanger les rôles joués par k et ℓ , on peut supposer que $k > \ell$. On a :

$$\lfloor ka \rfloor > ka - 1 \quad \text{et} \quad \lfloor \ell a \rfloor \leq \ell a \quad \text{donc} \quad \lfloor ka \rfloor - \lfloor \ell a \rfloor > (k - \ell)a - 1$$

Or $k > \ell$ et k, ℓ sont des entiers donc $k - \ell \geq 1$. Par ailleurs $a > 1$ donc $(k - \ell)a \geq a > 1$. On en déduit que $\lfloor ka \rfloor - \lfloor \ell a \rfloor > 0$. En particulier, $\lfloor ka \rfloor \neq \lfloor \ell a \rfloor$. Ainsi :

$$\boxed{\forall k, \ell \in \mathbb{N}, k \neq \ell \implies \lfloor ka \rfloor \neq \lfloor \ell a \rfloor}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $p = \max(\{k \in \mathbb{N} \mid \lfloor ka \rfloor \leq n\})$.

- ★ En particulier, p appartient à l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid \lfloor ka \rfloor \leq n\}$ (par définition du maximum) donc $\lfloor pa \rfloor \leq n$. Or $pa - 1 < \lfloor pa \rfloor$ donc $pa < n + 1$. En divisant par $a > 0$, on obtient l'inégalité $p < \frac{n+1}{a}$.
- ★ Par définition de p , on a $p+1 \notin \{k \in \mathbb{N} \mid \lfloor ka \rfloor \leq n\}$ donc $\lfloor (p+1)a \rfloor > n$. Or $\lfloor (p+1)a \rfloor$ et n sont des entiers donc $\lfloor (p+1)a \rfloor \geq n+1$. On sait que $\lfloor (p+1)a \rfloor \leq (p+1)a$ donc l'inégalité précédente entraîne que $n+1 \leq (p+1)a$. En divisant par $a > 0$ puis en soustrayant 1, on obtient l'inégalité $p \geq \frac{n+1}{a} - 1$.

Finalement :

$$\boxed{\frac{n+1}{a} - 1 \leq p < \frac{n+1}{a}}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq a$. On pose $p = \max(\{k \in \mathbb{N} \mid \lfloor ka \rfloor \leq n\})$. Remarquons tout d'abord que :

$$\lfloor 1 \times a \rfloor = \lfloor a \rfloor \leq a \leq n$$

donc $1 \in \{k \in \mathbb{N} \mid \lfloor ka \rfloor \leq n\}$. Par définition de p , on a alors $p \geq 1$. On en déduit que :

$$\llbracket 1, n \rrbracket \cap E_a = \{i \in E_a \mid i \leq n\} = \{\lfloor ka \rfloor \mid k \in \llbracket 1, p \rrbracket\}$$

Les éléments de cet ensemble sont deux à deux distincts d'après la première question donc :

$$\text{Card}(\llbracket 1, n \rrbracket \cap E_a) = p$$

La question précédente nous donne les inégalités souhaitées :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n \geq a \implies \left(\frac{n+1}{a} - 1 \leq x_n(a) < \frac{n+1}{a} \right)}$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq a$. On a (d'après la question précédente) :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{an} - \frac{1}{n} \leq \frac{x_n(a)}{n} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{an}$$

Or :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{an} - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{an} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a}$$

donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\text{la suite } \left(\frac{x_n(a)}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est convergente de limite } \frac{1}{a}}$$

2. Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que les ensembles E_p et E_q forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme E_p et E_q forment une partition de $\mathbb{N}^*$, on a $E_p \cup E_q = \mathbb{N}^*$. On en déduit que :

$$[1, n] = [1, n] \cap \mathbb{N}^* = [1, n] \cap (E_p \cup E_q) = ([1, n] \cap E_p) \cup ([1, n] \cap E_q)$$

Or E_p et E_q forment une partition de $\mathbb{N}^*$ donc $E_p \cap E_q = \emptyset$. On en déduit que :

$$([1, n] \cap E_p) \cap ([1, n] \cap E_q) = \emptyset$$

La formule donnant le cardinal d'une réunion disjointe d'ensembles finis nous donne alors :

$$n = \text{Card}([1, n]) = \text{Card}([1, n] \cap E_p) + \text{Card}([1, n] \cap E_q)$$

Autrement dit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n = x_n(p) + x_n(q) \quad \text{i.e.} \quad 1 = \frac{x_n(p)}{n} + \frac{x_n(q)}{n}$$

Or $\frac{x_n(p)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{p}$ et $\frac{x_n(q)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{q}$ donc, en faisant tendre n vers $+\infty$, dans l'égalité précédente, il vient :

$$\boxed{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1}$$

(b) On raisonne par l'absurde : supposons que $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Il existe alors $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{p}{q} = \frac{a}{b}$. Ainsi, $pb = qa$ et donc $[pb] = [qa]$. Comme a et b sont des entiers naturels non nuls, on en déduit que $[pb] \in E_p \cap E_q$. En particulier $E_p \cap E_q \neq \emptyset$, ce qui contredit le fait que E_p et E_q forment une partition de $\mathbb{N}^*$. Ainsi :

$$\boxed{\text{le nombre } \frac{p}{q} \text{ est irrationnel}}$$

On a $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ donc $\frac{p}{q} = p - 1$. Par l'absurde, si p est rationnel, alors $\frac{p}{q} = p - 1$ est rationnel (la différence de deux nombres rationnels étant un nombre rationnel), ce qui est absurde. Ainsi :

$$\boxed{\text{le nombre } p \text{ est irrationnel}}$$

3. On suppose que p et q sont des nombres strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, le nombre p étant irrationnel.

(a) Comme $q > 0$, on a $\frac{1}{q} > 0$. On en déduit que $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q} < 1$. De plus, $p > 0$ donc $0 < \frac{1}{p} < 1$. Par décroissance stricte de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que :

$$\boxed{p > 1}$$

Par l'absurde, si q est un nombre rationnel, alors on a aussi $\frac{1}{q} \in \mathbb{Q}$ (l'inverse d'un rationnel non nul est un rationnel). Par conséquent, $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q} \in \mathbb{Q}$ (une différence de nombres rationnels est un rationnel), puis $p \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde. Ainsi :

$$\boxed{q \text{ est un nombre irrationnel}}$$

(b) Comme p et q sont irrationnel, on a $mp, nq \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Les inégalités liées à la partie entière s'écrivent donc :

$$mp - 1 < [mp] < mp \quad \text{et} \quad nq - 1 < [nq] < nq,$$

i.e. :

$$mp - 1 < k < mp \quad \text{et} \quad nq - 1 < k < nq$$

Or :

$$k = k \times 1 = k \times \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = \frac{k}{p} + \frac{k}{q}$$

et comme $\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \in \mathbb{R}_+^*$, les inégalités précédentes nous donnent :

$$m - \frac{1}{p} < \frac{k}{p} < m \quad \text{et} \quad n - \frac{1}{q} < \frac{k}{q} < n$$

En sommant ces inégalités, il vient :

$$m + n - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) < \underbrace{\frac{k}{p} + \frac{k}{q}}_{=k} < m + n$$

Comme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on peut conclure que :

$$\boxed{m + n - 1 < k < m + n}$$

L'entier $m + n$ est le successeur de l'entier $m + n - 1$. L'intervalle $]m + n - 1, m + n[$ ne peut donc pas contenir d'entier (k ici). Ainsi :

$$\boxed{E_p \cap E_q = \emptyset}$$

(c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $i = \left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor$ et $j = \left\lfloor \frac{k}{q} \right\rfloor$.

i. On suppose que $k \notin E_p$, *i.e.* que :

$$\forall \ell \in \mathbb{N}^*, \quad k \neq [\ell p]$$

Par définition de i , on a :

$$i \leq \frac{k}{p} < i + 1 \quad \text{donc} \quad ip \leq k < (i + 1)p$$

★ Par l'absurde, si $k = ip$ alors $i \neq 0$ car $k \neq 0$ et donc $p = \frac{k}{i} \in \mathbb{Q}$, ce qui est exclu. Ainsi, $k \neq ip$, *i.e.* $ip < k$.

★ Par l'absurde, si $(i + 1)p - 1 \leq k < (i + 1)p$ alors $k < (i + 1)p \leq k + 1$. Or $(i + 1)p$ n'est pas un entier (puisque p est irrationnel) donc $\lfloor (i + 1)p \rfloor = k$. Ainsi, $k \in E_p$ (car $i + 1 \in \mathbb{N}^*$), ce qui est exclu.

Par conséquent :

$$\boxed{\text{si } k \notin E_p, \text{ alors } ip < k < ip + p - 1}$$

ii. On suppose que $k \notin E_p \cup E_q$. Autrement dit, $k \notin E_p$ et $k \notin E_q$. D'après la question précédente, on a :

$$ip < k < ip + p - 1 \quad \text{et} \quad jq < k < jq + q - 1,$$

le raisonnement étant analogue pour le deuxième encadrement. Or $k = \frac{k}{p} + \frac{k}{q}$ et (en divisant par $1/p > 0$ ou $1/q > 0$) :

$$i < \frac{k}{p} < i + 1 - \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad j < \frac{k}{q} < j + 1 - \frac{1}{q}$$

En sommant les inégalités, il vient :

$$i + j < k < i + j + 2 - \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right)$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{si } k \notin E_p \cup E_q, \text{ alors } i + j < k < i + j + 1}$$

iii. Montrons que $E_p \cup E_q = \mathbb{N}^*$ en raisonnant par double inclusion.

— Comme E_p et E_q sont des parties de $\mathbb{N}^*$, on a $E_p \cup E_q \subset \mathbb{N}^*$.

— Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par l'absurde, si $k \notin E_p \cup E_q$, alors k est un entier appartenant à l'intervalle $]i + j, i + j + 1[$ ce qui est absurde (en effet, $i + j$ et $i + j + 1$ sont des entiers et $i + j + 1$ est le successeur de $i + j$). Ainsi, $k \in E_p \cup E_q$. On a donc l'inclusion $\mathbb{N}^* \subset E_p \cup E_q$.

Finalement :

$$\boxed{E_p \cup E_q = \mathbb{N}^*}$$

4. (a) On a $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. On utilise le théorème de Beatty.

★ Tout d'abord, φ est irrationnel car si $\varphi \in \mathbb{Q}$, alors $\sqrt{5} = 2\varphi - 1 \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde¹.

1. La démonstration du fait que $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ est la même que celle menée dans le chapitre 2 pour $\sqrt{2}$.

★ De plus, $\varphi^2 = \varphi + 1$ donc, en divisant par $\varphi^2 \neq 0$ on obtient $1 = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2}$.

D'après le théorème de Beatty, on peut conclure que :

les ensembles E_φ et E_{φ^2} forment une partition de $\mathbb{N}^*$

- (b) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ tels que les ensembles E_a et E_a^2 forment une partition de $\mathbb{N}^*$. D'après le théorème de Beatty, on a :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = 1 \quad i.e. \quad \frac{a+1}{a^2} = 1 \quad \text{soit encore} \quad a+1 = a^2$$

On en déduit que $a \in \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right\}$ et comme $a > 0$, on a nécessairement :

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$