Un théorème de Beatty

(facultatif)

Si P et Q sont deux parties non vides de $\mathbb{N}^*$, on dit que P et Q forment une partition de $\mathbb{N}^*$ si :

$$P \cap Q = \varnothing \qquad \text{et} \qquad P \cup Q = \mathbb{N}^*$$

Le théorème de Beatty qui suit est un résultat arithmétique publié en 1926 par Samuel Beatty (mathématicien canadien) qui donne une condition nécessaire et suffisante sur deux nombres réels pour que deux suites associées, appelées *suites de Beatty*, forment une partition de $\mathbb{N}^*$. L'énoncé est le suivant.

Théorème (de Beatty) Soient $p, q \in]1, +\infty[$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(*i*) $p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$;

(*ii*) les deux suites d'entiers $P = \big(\lfloor np \rfloor\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $Q = \big(\lfloor nq \rfloor\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$.

Notations.

- ⋆ Si E est un ensemble fini, on notera $\mathrm{Card}(E)$ le nombre d'éléments de E, appelé *cardinal* de E.
- ⋆ Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $E_a = \big\{ \lfloor ka \rfloor \,\big|\, k \in \mathbb{N}^* \big\}$.

Si A et B sont des parties *disjointes* de E (*i.e.* telles que $A \cap B = \varnothing$), alors on a l'égalité :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$$

1. Soit $a \in]1, +\infty[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$x_n(a) = \mathrm{Card}\Big(\big\{ i \in E_a \,\big|\, i \leqslant n \big\}\Big) = \mathrm{Card}\big([\![1, n]\!] \cap E_a\big)$$

   (a) Soient $k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $k \neq \ell$. Montrer que $\lfloor ka \rfloor \neq \lfloor \ell a \rfloor$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note p le plus grand élément de l'ensemble $\big\{ k \in \mathbb{N} \,\big|\, \lfloor ka \rfloor \leqslant n \big\}$. Montrer que :

$$\frac{n+1}{a} - 1 \leqslant p < \frac{n+1}{a}$$

   (c) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad n \geqslant a \implies \left(\frac{n+1}{a} - 1 \leqslant x_n(a) < \frac{n+1}{a} \right)$$

   (d) Justifier que la suite $\left(\dfrac{x_n(a)}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

On souhaite maintenant démontrer le théorème.

2. On considère deux nombres réels $p, q \in]1, +\infty[$ tels que les ensembles E_p et E_q forment une partition de $\mathbb{N}^*$.
   (a) Établir que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
   (b) Montrer que $\dfrac{p}{q}$ est irrationnel. En déduire que p est irrationnel.

Ceci démontre l'implication $(ii) \Longrightarrow (i)$.

3. On suppose maintenant que p et q sont deux nombres strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, le nombre p étant irrationnel. On veut montrer que E_p et E_q forment une partition de $\mathbb{N}^*$.
   (a) Justifier que $p > 1$ et que q est irrationnel.
   (b) Par l'absurde, on suppose que $E_p \cap E_q \neq \varnothing$ et on considère un élément k de $E_p \cap E_q$. Il existe donc des entiers $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $k = \lfloor mp \rfloor = \lfloor nq \rfloor$. Établir que $m + n - 1 < k < m + n$ et conclure.
   (c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $i = \left\lfloor \dfrac{k}{p} \right\rfloor$ et $j = \left\lfloor \dfrac{k}{q} \right\rfloor$.
      i. On suppose que $k \notin E_p$. Montrer que $ip < k < ip + p - 1$.
      ii. On suppose que $k \notin E_p \cup E_q$. Montrer que $i + j < k < i + j + 1$.
      iii. Conclure que $E_p \cup E_q = \mathbb{N}^*$.

Ceci démontre l'implication $(i) \Longrightarrow (ii)$. *Le théorème est donc démontré.*

4. *Étude d'un exemple.*
   (a) On note φ la solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$. Montrer que les ensembles E_φ et E_{φ^2} forment une partition de $\mathbb{N}^*$.
   (b) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ tels que E_a et E_{a^2} forment une partition de $\mathbb{N}^*$. Montrer que $a = \varphi$.