Équivalent d'une espérance liée à la loi zêta†

par Vincent Devinck

Lycée Louis Thuillier, Amiens

RÉSUMÉ. *Nous répondons à la question 927 posée dans la rubrique Questions et Réponses de la RMS. Étant donnée une suite de variables aléatoires réelles indépendantes* $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *suivant la même loi zêta de paramètre* $r \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$*, on cherche un équivalent quand* n *tend vers* $+\infty$ *de l'espérance de la variable aléatoire* $Z_n = \max(X_1, \dots, X_n)$*. On démontre qu'il existe un nombre réel* $c > 0$ *tel que*

$$\mathbb{E}(Z_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} cn^{1/(r-1)}.$$

Nous serons amenés à chercher un équivalent de la factorielle partielle $\mathfrak{p}_n = \prod_{\ell=1}^{n} (\ell r - \ell - 1)$ *quand* n *tend vers* $+\infty$*, qui est liée à la fonction Gamma d'Euler.*

ABSTRACT. Asymptotic equivalent of a mean expectation related to the Zêta distribution
In this paper, an answer of question 927, asked in the RMS review, is given. Considering a sequence $(X_n)_{n\geqslant 1}$ *of independent and identically distributed random variables that have Zêta distribution with parameter* $r \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$*, we deal with the asymptotic behavior of the expected value of the random variable* $Z_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ *as* n *goes to infinity. We prove that there exists a positive real number c such that*

$$\mathbb{E}(Z_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} cn^{1/(r-1)}$$

In order to get this estimate, we will need to find the asymptotic behavior of the sequence of products $\mathfrak{p}_n = \prod_{k=1}^{n} (\ell r - \ell - 1)$*, which is related to the Euler Gamma function.*

MOTS-CLÉS : *loi zêta, sommation par parties, formule de Stirling, fonctions Gamma et Bêta d'Euler.*

†2010 Mathematics Subject Classification : 33B20, 40E10

1. Introduction

Si r est un entier naturel supérieur ou égal à 2, on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi zêta de paramètre r (que l'on note $X \hookrightarrow \zeta(r)$) si son univers image est $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et si

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{\zeta(r)k^r}.$$

Une telle variable aléatoire admet une espérance si et seulement si $r \geqslant 3$ et dans ce cas, celle-ci vaut $\dfrac{\zeta(r-1)}{\zeta(r)}$.

Dans toute la suite, on suppose que r est supérieur ou égal à 3. On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi zêta de paramètre r. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$Z_n := \max(X_1, \ldots, X_n).$$

Nous nous intéressons à la question posée par Yves Duval dans le volume 127-2 de la RMS.

Question 927.

a) Montrer que $\mathbb{E}(Z_n) = \mathcal{O}\big(n^{1/(r-1)}\big)$ et que $n^{1/(r-1)} = \mathcal{O}\big(\mathbb{E}(Z_n)\big)$.

b) Est-ce que $\mathbb{E}(Z_n)$ est équivalent à $cn^{1/(r-1)}$ pour un certain $c > 0$?

La réponse à cette question, positive, est la suivante. La constante c s'exprime à l'aide de la fonction Γ d'Euler. On rappelle que cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x > 0 \qquad \Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On introduit aussi la fonction Gamma *incomplète* définie par

$$\forall (a, x) \in]0, +\infty[\times[0, +\infty[\qquad \Gamma(a, x) := \int_x^{+\infty} t^{a-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

et que l'on utilisera pour énoncer les lemmes **1** et **6**.

Théorème 1. — *Nous avons l'équivalence*

$$\mathbb{E}(Z_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} cn^{1/(r-1)},$$

où la constante c est définie par

$$c := \left(\frac{1}{(r-1)\zeta(r)}\right)^{\frac{1}{r-1}} \Gamma\Big(\frac{r-2}{r-1}\Big).$$

Avant de dégager les différentes articulations de l'article, introduisons quelques notations que nous utiliserons constamment dans la suite. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de nombres réels, alors pour tout nombre réel X, on note $\sum_{n=1}^{X} a_n$ la somme des nombres a_n pour n allant de 1 à la partie entière $\lfloor X \rfloor$ de X. Si f et g sont deux fonctions définies sur $[1,+\infty[$ à valeurs réelles où g est à valeurs positives, la notation $f(t) \ll g(t)$ signifie qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t \in [1,+\infty[$, on ait $|f(t)| \leqslant Cg(t)$. La notation $\ll$ de Vinogradov a le même sens que celle de Landau ($\mathcal{O}$) mais elle est plus adaptée pour la transitivité. Nous utiliserons donc librement les deux notations dans la suite. Nous écrirons encore $f(t) = \mathrm{o}\big(g(t)\big)$ pour dire qu'il existe une fonction ε définie sur $[1,+\infty[$ qui tend vers 0 en $+\infty$ telle que pour tout $t \in [1,+\infty[$ on ait l'égalité $f(t) = \varepsilon(t)g(t)$. Enfin, nous poserons dans la suite, pour alléger les notations :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad n_r := n^{1/(r-1)}.$$

Dans le deuxième paragraphe, nous allons exprimer l'espérance de Z_n à l'aide de sa fonction de répartition (proposition **1**). Nous isolons dans le paragraphe 3 certaines estimations qui nous seront utiles dans la suite, notamment celles portant sur les restes des séries de Riemann convergentes (proposition **2**). Nous serons alors en mesure de fournir dans la quatrième partie l'ordre de grandeur de l'espérance de Z_n (question **a**) ; c'est l'objet de la proposition **5**. Ceci nécessite notamment de décomposer l'espérance en une somme de deux termes : une partie F_n (qui est une somme partielle de $\mathbb{E}(Z_n)$ dont l'estimation est difficile) et un terme *reste* G_n dont l'estimation est plus aisée (lemme **1**). La partie 5 est consacrée à l'estimation de la somme partielle liée à F_n suivante :

$$\mathrm{H}_n := \sum_{k=1}^{n_r} \big(1 - \mathbb{P}(X_1 \geqslant k)\big)^n.$$

La première étape consiste à *remplacer* les restes des séries de Riemann $\mathbb{P}(X_1 \geqslant k)$ par l'équivalent associé obtenu dans la proposition **2** ; c'est l'objet du lemme **2**. Ceci nous conduit à estimer la somme plus explicite :

$$\mathrm{I}_n := \sum_{k=1}^{n_r} \Big(1 - \frac{1}{(r-1)\zeta(r)k^{r-1}}\Big)^n.$$

L'idée est alors d'utiliser une sommation par parties pour écrire cette somme sous forme intégrale (lemme **3**). Nous réalisons plusieurs intégrations par parties successives (lemme **4**) pour la calculer. Nous estimons enfin les différents termes résultants de ces intégrations par parties (lemmes **5** et **6**). Dans la partie 6, nous calculons deux sommes de séries, liées à la fonction Gamma d'Euler, que nous avions volontairement isolées pour gagner en lisibilité.

2. Décomposition de l'espérance de Z_n

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans un premier temps, nous cherchons une expression exploitable de l'espérance de Z_n. Comme il est aisé de déterminer sa fonction de répartition, nous utilisons la proposition générale suivante, qui permet essentiellement de calculer l'espérance d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition.

Proposition 1. — *Soit X une variable aléatoire réelle discrète d'univers image $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Alors*

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k) \in [0, +\infty].$$

Démonstration On a

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{+\infty} j\, \mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j) \sum_{k=1}^{j} 1 = \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{j} \mathbb{P}(X = j).$$

On peut permuter les symboles sommes puisqu'ils portent sur des familles positives :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = j) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k),$$

ce qui démontre la proposition. ***cqfd***

Remarque. En utilisant le théorème de Fubini, on peut montrer de la même manière que si X est une variable aléatoire positive ou nulle, alors

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\, \mathrm{d}t \in [0, +\infty].$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire Z_n admet une espérance car

$$0 \leqslant Z_n \leqslant X_1 + \cdots + X_n$$

et car, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, X_k admet une espérance (puisque $r \geqslant 3$). Nous avons alors, d'après la proposition **1**,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_n) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\max(X_1, \ldots, X_n) \geqslant k) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \big(1 - \mathbb{P}(\max(X_1, \ldots, X_n) < k)\big) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \Big(1 - \mathbb{P}\big(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i < k)\big)\Big).
\end{aligned}$$

Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et de même loi, donc

$$\mathbb{E}(Z_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \big(1 - \mathbb{P}(X_1 < k)^n\big) = \mathrm{F}_n + \mathrm{G}_n,$$

où l'on a posé

$$\mathrm{F}_n := \sum_{k=1}^{n_r} \big(1 - \mathbb{P}(X_1 < k)^n\big) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{G}_n := \sum_{k>n_r} \big(1 - \mathbb{P}(X_1 < k)^n\big). \tag{1}$$

Dans le paragraphe 4, nous allons estimer la somme G_n tandis que l'étude de F_n, qui est plus compliquée, est l'objet du paragraphe 5. Pour gagner en lisibilité, nous allons dégager certains résultats qui seront utilisés dans la suite.

3. Intermède : quelques estimations préliminaires

La recherche d'un équivalent de l'espérance de Z_n repose sur de nombreuses estimations. Nous isolons dans ce paragraphe certaines d'entre elles. Le développement asymptotique lié à la série harmonique ou encore celui des restes des séries de Riemann convergentes est très classique.

3.1. *Développement asymptotique des restes des séries de Riemann convergentes*

Soit $a \in]1, +\infty[$. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$\mathrm{R}_n := \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^a}.$$

La détermination d'un développement asymptotique des restes R_n nous permettra par exemple d'étudier la somme G_n de (1).

Proposition 2. — *On dispose du développement asymptotique*

$$R_n = \frac{1}{(a-1)n^{a-1}} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^a}\Big).$$

Démonstration Par décroissance de $t \mapsto t^{-a}$, on a

$$\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^a} \leqslant R_n \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^a}$$

et donc

$$\frac{1}{(a-1)n^{a-1}} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{(a-1)(n-1)^{a-1}}. \tag{2}$$

Donc

$$R_n = \frac{1}{(a-1)n^{a-1}} + \varepsilon_n,$$

avec $0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant \dfrac{1}{a-1}\Big(\dfrac{1}{(n-1)^{a-1}} - \dfrac{1}{n^{a-1}}\Big) = \mathcal{O}\Big(\dfrac{1}{n^a}\Big)$. ***cqfd***

3.2. *Factorielle partielle*

L'estimation des sommes partielles de la série harmonique va nous permettre de trouver un développement asymptotique de F_n (voir (1)). On pose $h_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 3. — *Pour tout entier naturel n non nul, on a*

$$h_n = \ln(n) + \gamma + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

où $\gamma := 1 - \displaystyle\int_1^{+\infty} \{t\}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \approx 0,5772156649\ldots$ est la constante d'Euler. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a ici noté $\{t\}$ la partie fractionnaire de t qui est définie par $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$ où $\lfloor t \rfloor$ est la partie entière de t.

Démonstration Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On utilise une sommation par parties :

$$\begin{aligned} h_n = \sum_{k=1}^{n} \Big(\int_k^n \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + \frac{1}{n} \Big) &= \sum_{k=1}^{n} \int_1^n \mathbf{1}_{[k,n]}(t)\frac{\mathrm{d}t}{t^2} + 1 \\ &= \int_1^n \Big(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{[k,n]}(t) \Big) \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + 1 \\ &= \int_1^n \lfloor t \rfloor \frac{\mathrm{d}t}{t^2} + 1 \end{aligned}$$

car, pour tout $t \in [1, n]$, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{[k,n]}(t)$ compte le nombre d'entiers naturels k non nuls inférieurs ou égaux à t. Donc

$$\begin{aligned} h_n &= \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} + 1 - \int_1^n \{t\}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ &= \ln(n) + \Big(1 - \int_1^{+\infty} \{t\}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \Big) + \int_n^{+\infty} \{t\}\frac{\mathrm{d}t}{t^2} \end{aligned}$$

car l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty}\{t\}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge (puisque $0\leqslant\{t\}\leqslant 1$ pour tout $t\in\mathbb{R}$ et par comparaison de fonctions intégrables à valeurs positives). En majorant la partie fractionnaire par 1, il vient

$$0\leqslant\int_n^{+\infty}\{t\}\,\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\leqslant\frac{1}{n},$$

ce qui démontre la proposition. ***cqfd***

Pour démontrer le théorème **1**, nous aurons besoin d'estimer les produits $\mathfrak{p}_n$ définis comme suit :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\qquad \mathfrak{p}_n:=\prod_{\ell=1}^{n}(\ell r-\ell-1).$$

Corollaire 1. — *On a l'équivalence*

$$\mathfrak{p}_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\Gamma\left(\frac{r-2}{r-1}\right)^{-1}\,n\,!\,(r-1)^n n^{-1/(r-1)}.$$

Démonstration Soit $n\in\mathbb{N}^*$. En prenant le logarithme (ce qui est possible car $r\geqslant 3$ et donc $\ell r-\ell-1>0$ pour $\ell\geqslant 1$), on a

$$\begin{aligned}\ln(\mathfrak{p}_\mathfrak{n})&=\sum_{\ell=1}^{n}\ln(\ell r-\ell-1)\\&=\sum_{\ell=1}^{n}\ln\Big[\ell(r-1)\big(1-\frac{1}{\ell(r-1)}\big)\Big]\\&=\ln(n\,!)+\ln\big((r-1)^n\big)+\sum_{\ell=1}^{n}\ln\Big(1-\frac{1}{(r-1)\ell}\Big),\end{aligned}\tag{3}$$

ce qui a un sens puisque $\dfrac{1}{(r-1)\ell}\leqslant\dfrac{1}{2}$. On obtient, en utilisant la proposition **3** et le développement en série entière du logarithme, que

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=1}^{n}\ln\Big(1-\frac{1}{(r-1)\ell}\Big)&=-\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(r-1)^k\ell^k}\\&=-\frac{1}{r-1}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell}-\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k(r-1)^k}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell^k}\\&=-\frac{\ln(n)}{r-1}-\frac{\gamma}{r-1}+\mathcal{O}\big(\frac{1}{n}\big)-\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k(r-1)^k}\Big(\zeta(k)-\sum_{\ell=n+1}^{+\infty}\frac{1}{\ell^k}\Big).\end{aligned}$$

La majoration (2) obtenue dans la démonstration de la proposition **2** fournit

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k(r-1)^k}\sum_{\ell=n+1}^{+\infty}\frac{1}{\ell^k} &\leqslant \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)(r-1)^k n^{k-1}}\\ &\leqslant \Big(\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k(k-1)(r-1)^k}\Big)\frac{1}{n}\\ &\ll \frac{1}{n},\end{aligned}$$

puisque la série de terme général $\dfrac{1}{k(k-1)(r-1)^k}$ est convergente. Ainsi,

$$\sum_{\ell=1}^{n}\ln\Big(1-\frac{1}{(r-1)\ell}\Big) = -\frac{\ln(n)}{r-1}-\frac{\gamma}{r-1}-\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\zeta(k)}{k(r-1)^k}+\mathcal{O}\big(\frac{1}{n}\big).$$

La somme de la série ci-dessus est calculée dans l'appendice (proposition **6**). On obtient l'équivalent annoncé en prenant l'exponentielle. ***cqfd***

Remarque. La formule de Stirling permet de préciser cet équivalent :

$$\mathfrak{p}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\,\Gamma\left(\frac{r-2}{r-1}\right)^{-1}\left(\frac{(r-1)n}{\mathrm{e}}\right)^{n} n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{r-1}}. \tag{4}$$

Les produits $\mathfrak{p}_n$ s'expriment en fait à l'aide de la fonction Gamma d'Euler (proposition **7**). On obtient ici un équivalent des produits sans utiliser la formule de Stirling généralisée.

3.3. *Un équivalent lié à une fonction*

Nous serons amenés à considérer dans la suite la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall t>0 \qquad f(t) := 1-\frac{1}{(r-1)\zeta(r)t^{r-1}}. \tag{5}$$

Celle-ci nous sera utile lorsqu'on étudiera la somme F_n de (1). Nous utiliserons notamment le résultat suivant.

Proposition 4. — *On a l'équivalence*

$$f\left(n_r\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{-\frac{1}{(r-1)\zeta(r)}}.$$

Démonstration Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$f\left(n_r\right)^n = \Big(1-\frac{1}{(r-1)\zeta(r)n}\Big)^n = \exp\Big[n\ln\big(1-\frac{1}{(r-1)\zeta(r)n}\big)\Big],$$

et comme

$$\ln\Big(1-\frac{1}{(r-1)\zeta(r)n}\Big)=-\frac{1}{(r-1)\zeta(r)n}+\mathrm{o}(\frac{1}{n}),$$

il vient

$$f\,(n_r)^n=\mathrm{e}^{\mathrm{o}(1)}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{(r-1)\zeta(r)}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\mathrm{e}^{-\frac{1}{(r-1)\zeta(r)}}.$$

cqfd

4. Réponse à la première question

Il est beaucoup plus aisé d'étudier la somme G_n (voir (1)). C'est ce que nous faisons dans un premier temps.

4.1. *Estimation de* G_n

Lemme 1. — *Lorsque* n *tend vers* $+\infty$*, on a*

$$\mathrm{G}_n=d(r)n_r+\mathcal{O}(1)$$

où

$$d(r):=-1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{(r-1)\zeta(r)}}+\Big(\frac{1}{(r-1)\zeta(r)}\Big)^{1/(r-1)}\int_0^{\frac{1}{(r-1)\zeta(r)}}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1/(r-1)}}\,\mathrm{d}t.$$

Remarque. L'intégrale qui apparaît dans cet énoncé s'exprime à l'aide de la fonction Γ incomplète puisque

$$\int_0^{\frac{1}{(r-1)\zeta(r)}}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1/(r-1)}}\,\mathrm{d}t=\Gamma\Big(\frac{r-2}{r-1}\Big)-\Gamma\Big(\frac{r-2}{r-1},\frac{1}{(r-1)\zeta(r)}\Big).$$

Démonstration Soit k un entier tel que $k>n_r$. Par définition de X_1, et d'après la proposition **2**, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1<k)=1-\mathbb{P}(X_1\geqslant k)&=1-\frac{1}{\zeta(r)}\sum_{j=k}^{+\infty}\frac{1}{j^r}\\&=1-\frac{1}{(r-1)\zeta(r)k^{r-1}}+\mathcal{O}(\frac{1}{k^r}),\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1<k)^n&=\exp\Big[n\ln\Big(1-\frac{1}{(r-1)\zeta(r)k^{r-1}}+\mathcal{O}(\frac{1}{k^r})\Big)\Big]\\&=\exp\Big(-\frac{n}{(r-1)\zeta(r)k^{r-1}}+\mathcal{O}(\frac{n}{k^r})\Big).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{G}_n &= \sum_{k>n_r} \Big[1 - \exp\Big(-\frac{n}{(r-1)\zeta(r)k^{r-1}} + \mathcal{O}\big(\frac{n}{k^r}\big)\Big)\Big] \\
&= \sum_{k>n_r} \Big(1 - \mathrm{e}^{\mathcal{O}\left(\frac{n}{k^r}\right)}\Big) + \mathrm{e}^{\mathcal{O}\left(\frac{1}{n_r}\right)} \sum_{k>n_r} \Big(1 - \exp\Big(-\frac{n}{(r-1)\zeta(r)k^{r-1}}\Big)\Big), \qquad (6)
\end{aligned}$$

car $k^r > n^{r/(r-1)}$ et $\frac{n}{n^{r/(r-1)}} = \frac{1}{n_r}$. Soit $C > 0$ tel que $\mathcal{O}\left(\frac{n}{k^r}\right) \leqslant C\frac{n}{k^r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k > n_r$. Comme $\frac{n}{k^r} \in [0,1]$, on a (d'après l'inégalité des accroissements finis)

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k > n_r \qquad \Big|1 - \mathrm{e}^{\mathcal{O}\left(\frac{n}{k^r}\right)}\Big| \leqslant C\,\mathrm{e}^C\,\frac{n}{k^r}$$

et donc

$$\sum_{k>n_r} \left(1 - \mathrm{e}^{\mathcal{O}\left(\frac{n}{k^r}\right)}\right) \ll \sum_{k>n_r} \frac{n}{k^r} \ll \frac{n}{n_r^{r-1}} = 1,$$

où la dernière estimation provient de la proposition **2**. Ainsi

$$\sum_{k>n_r} \Big(1 - \mathrm{e}^{\mathcal{O}\left(\frac{n}{k^r}\right)}\Big) = \mathcal{O}(1).$$

On estime ensuite la deuxième somme de (6) (notée s) à l'aide d'une sommation par parties. Posons $c(r) := \frac{1}{(r-1)\zeta(r)}$. On a (en utilisant le théorème d'intégration terme à terme)

$$\begin{aligned}
s := \sum_{k>n_r} \Big(1 - \exp\big(-c(r)\frac{n}{k^{r-1}}\big)\Big) &= \sum_{k>n_r} \int_0^{c(r)} \mathbf{1}_{\left[0, c(r)\frac{n}{k^{r-1}}\right]}(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{c(r)} \Big(\sum_{k>n_r} \mathbf{1}_{\left[0, c(r)\frac{n}{k^{r-1}}\right]}(t)\Big)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Pour tout $t \in [0, c(r)]$, on a

$$\forall k > n_r \qquad \mathbf{1}_{\left[0, c(r)\frac{n}{k^{r-1}}\right]}(t) = 1 \iff n_r < k \leqslant \left(\frac{c(r)n}{t}\right)^{1/(r-1)}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^{c(r)} \Bigg(\sum_{n_r < k \leqslant \left(\frac{c(r)}{t}\right)^{1/(r-1)} n_r} 1\Bigg)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{c(r)} \left[n_r\left(\frac{c(r)^{1/(r-1)}}{t^{1/(r-1)}} - 1\right) + \mathcal{O}(1)\right]\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= n_r\left(c(r)^{1/(r-1)} \int_0^{c(r)} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t^{1/(r-1)}}\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-c(r)} - 1\right) + \mathcal{O}(1).
\end{aligned}$$

Comme enfin $\mathrm{e}^{\mathcal{O}\left(\frac{1}{n_r}\right)} = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n_r}\right)$, on obtient bien l'estimation annoncée. ***cqfd***

4.2. *Ordre de grandeur de* $\mathbb{E}(Z_n)$

Le développement asymptotique précédemment obtenu va nous permettre de préciser l'ordre de grandeur de l'espérance de Z_n, c'est-à-dire de répondre à la question **a**.

Proposition 5. — *L'ordre de grandeur de* $\mathbb{E}(Z_n)$ *est* n_r *:*

$$n_r \ll \mathbb{E}(Z_n) \ll n_r.$$

Démonstration D'après le lemme **1**, on a

$$\mathrm{G}_n \ll n_r \qquad \text{et} \qquad n_r \ll \mathrm{G}_n. \tag{7}$$

Pour tout entier naturel k non nul, on a $1-\mathbb{P}(X_1 < k)^n \geqslant 0$ donc $\mathbb{E}(Z_n) \geqslant \mathrm{G}_n$. La deuxième comparaison de (7) nous donne alors

$$n_r \ll \mathbb{E}(Z_n).$$

Pour la majoration de $\mathbb{E}(Z_n)$, on utilise la première comparaison de (7) et la majoration de F_n suivante :

$$\mathrm{F}_n \leqslant \sum_{k=1}^{n_r} \underbrace{\left(1 - \mathbb{P}\left(X_1 < k\right)^n\right)}_{\leqslant 1} \leqslant \lfloor n_r \rfloor \leqslant n_r.$$

Ainsi, on a aussi

$$\mathbb{E}(Z_n) \ll n_r,$$

ce qui démontre la proposition. ***cqfd***

Pour trouver un équivalent de l'espérance de Z_n, il nous faut encore trouver un développement asymptotique de F_n.

5. La partie difficile : l'estimation de F_n

Pour tout entier naturel n non nul, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_n &= \sum_{k=1}^{n_r} \Big(1 - \big(1 - \mathbb{P}(X_1 \geqslant k)\big)^n\Big) \\ &= n_r - \sum_{k=1}^{n_r} \big(1 - \mathbb{P}(X_1 \geqslant k)\big)^n + \mathcal{O}(1) \end{aligned} \tag{8}$$

et nous poserons dans la suite $\mathrm{H}_n := \sum_{k=1}^{n_r} \big(1 - \mathbb{P}(X_1 \geqslant k)\big)^n$.

5.1. *Rendre la somme* H_n *exploitable*

Le résultat suivant permet de *remplacer* « $\mathbb{P}(X_1 \geqslant k)$ » dans la somme H_n par $\dfrac{1}{(r-1)\zeta(r)k^{r-1}}$ (qui est l'ordre de grandeur de $\mathbb{P}(X_1 \geqslant k)$ d'après la proposition **2**).

Lemme 2. — *Pour tout entier naturel n non nul, on a*

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n_r} \Big(1 - \frac{1}{(r-1)\zeta(r)k^{r-1}}\Big)^n + \mathcal{O}(n^y),$$

où $y := \dfrac{2r-3}{2(r-1)^2}$.

Démonstration Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et k un entier de l'intervalle $[1, n_r]$. La différence

$$\big(1 - \mathbb{P}(X_1 \geqslant k)\big)^n - \Big(1 - \frac{1}{(r-1)\zeta(r)k^{r-1}}\Big)^n$$

est égale à

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{(r-1)\zeta(r)k^{r-1}} - \mathbb{P}(X_1 \geqslant k)\Big) \sum_{j=0}^{n-1} \big(1 - \mathbb{P}(X_1 \geqslant k)\big)^j \Big(1 - \frac{1}{(r-1)\zeta(r)k^{r-1}}\Big)^{n-1-j} \\ \ll \frac{n}{k^r}\end{aligned}$$

d'après la proposition **2** et car les termes de la somme ci-dessus sont positifs et inférieurs ou égaux à 1. On en déduit donc que

$$\big(1 - \mathbb{P}(X_1 \geqslant k)\big)^n = \Big(1 - \frac{1}{(r-1)\zeta(r)k^{r-1}}\Big)^n + \mathcal{O}\big(\frac{n}{k^r}\big). \tag{9}$$

De plus

$$\sum_{k=1}^{n_r} \big(1 - \mathbb{P}(X_1 \geqslant k)\big)^n = \sum_{k=1}^{n^y} \big(1 - \mathbb{P}(X_1 \geqslant k)\big)^n + \sum_{k=n^y}^{n_r} \big(1 - \mathbb{P}(X_1 \geqslant k)\big)^n + \mathcal{O}(1)$$

et

$$\sum_{k=1}^{n^y} \big(1 - \mathbb{P}(X_1 \geqslant k)\big)^n = \sum_{k=1}^{n^y} \Big(1 - \frac{1}{(r-1)\zeta(r)k^{r-1}}\Big)^n + \mathcal{O}\big(n^y\big),$$

car tous les termes des deux sommes sont inférieurs ou égaux à 1. En utilisant l'estimation (9), il vient

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n_r} \big(1 - \mathbb{P}(X_1 \geqslant k)\big)^n = \sum_{k=1}^{n^y} \Big(1 - \frac{1}{(r-1)\zeta(r)k^{r-1}}\Big)^n + \mathcal{O}\big(n^y\big) \\ + \sum_{k=n^y}^{n_r} \Big(1 - \frac{1}{(r-1)\zeta(r)k^{r-1}}\Big)^n + \mathcal{O}\Big(n \sum_{k=n^y}^{n_r} \frac{1}{k^r}\Big).\end{aligned}$$

D'après la proposition **2**, on a

$$n\sum_{k=n^y}^{n_r}\frac{1}{k^r}\leqslant n\sum_{k=n^y}^{+\infty}\frac{1}{k^r}\ll n^{\frac{1}{2(r-1)}},$$

car $1-y(r-1)=\dfrac{1}{2(r-1)}$ par définition de y. Le lemme est donc démontré puisque $\dfrac{1}{2(r-1)}\leqslant y$. ***cqfd***

On pose désormais, pour tout entier naturel n non nul,

$$\mathrm{I}_n:=\sum_{k=1}^{n_r}\Big(1-\frac{1}{(r-1)\zeta(r)k^{r-1}}\Big)^n.$$

5.2. *Intégrations par parties et calcul de la somme* $\mathbf{I}_n$

Posons $\alpha:=\big(\dfrac{1}{(r-1)\zeta(r)}\big)^{\frac{1}{r-1}}$ et considérons la fonction f définie en (5). Une sommation par parties permet d'écrire la somme I_n sous forme intégrale.

Lemme 3. — *Pour tout entier naturel* n *non nul, on a*

$$\mathrm{I}_n=n_rf(n_r)^n-\mathrm{J}_n+\mathcal{O}(1),$$

où

$$\mathrm{J}_n:=\int_\alpha^{n_r}\frac{n}{\zeta(r)t^{r-1}}f(t)^{n-1}\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration Remarquons que $f(\alpha)=0$. Pour tout entier $k\in[1,n_r]$, on a alors

$$\Big(1-\frac{1}{(r-1)\zeta(r)k^{r-1}}\Big)^n=\int_\alpha^k\frac{n}{\zeta(r)t^r}f(t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n&=\sum_{k=1}^{n_r}\int_\alpha^{n_r}\frac{n}{\zeta(r)t^r}f(t)^{n-1}\,\mathbf{1}_{[\alpha,k]}(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_\alpha^{n_r}\frac{n}{\zeta(r)t^r}f(t)^{n-1}\Big(\sum_{k=1}^{n_r}\mathbf{1}_{[\alpha,k]}(t)\Big)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}\tag{10}$$

Soit $t \in [\alpha, n_r]$. La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n_r} \mathbf{1}_{[\alpha,k]}(t)$ compte le nombre d'entiers $k \in [1, n_r]$ supérieurs ou égaux à t. Il y en a $n_r - t + \mathcal{O}(1)$. En remplaçant dans (10), il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n = n_r \int_\alpha^{n_r} \frac{n}{\zeta(r)t^r} f(t)^{n-1}\,\mathrm{d}t - \int_\alpha^{n_r} \frac{n}{\zeta(r)t^{r-1}} f(t)^{n-1}\,\mathrm{d}t \\ + \mathcal{O}\Big(\int_\alpha^{n_r} \frac{n}{\zeta(r)t^r} f(t)^{n-1}\,\mathrm{d}t\Big),\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{I}_n = n_r f(n_r)^n - \mathrm{J}_n + \mathcal{O}\left(f(n_r)^n\right).$$

Ceci nous donne le résultat annoncé puisque $f(n_r)^n \ll 1$ d'après la proposition **4**. ***cqfd***

Nous calculons maintenant l'intégrale J_n à l'aide de $n-1$ intégrations par parties. Rappelons qu'on a défini, dans le paragraphe 3, le produit

$$\mathfrak{p}_k = \prod_{\ell=1}^{k} (\ell r - \ell - 1)$$

pour tout entier naturel k non nul. Nous obtenons le résultat suivant.

Lemme 4. — *Pour tout $j \in \{1, \dots, n-1\}$, on a l'égalité*

$$\mathrm{J}_n = -\sum_{k=1}^{j} \frac{n\,!}{(n-k)\,!\, n_r^{kr-k-1} \zeta(r)^k \mathfrak{p}_k} f\left(n_r\right)^{n-k} \tag{11}$$

$$+ \int_\alpha^{n_r} \frac{n\,!}{(n-j-1)\,!\,\zeta(r)^{j+1}\mathfrak{p}_j t^{(j+1)(r-1)}} f(t)^{n-j-1}\,\mathrm{d}t. \tag{12}$$

Démonstration On rappelle que $\alpha = \Big(\dfrac{1}{(r-1)\zeta(r)}\Big)^{\frac{1}{r-1}}$.

On utilise un raisonnement par récurrence simple. Les fonctions

$$t \longmapsto -\frac{n}{\zeta(r)(r-2)t^{r-2}} \qquad \text{et} \qquad t \longmapsto f(t)^{n-1}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, n_r]$ de dérivées respectives

$$t \longmapsto \frac{n}{\zeta(r)t^{r-1}} \qquad \text{et} \qquad t \longmapsto \frac{n-1}{\zeta(r)t^r} f(t)^{n-2}\ ;$$

on peut donc intégrer par parties et on a, puisque $f(\alpha) = 0$,

$$\begin{aligned}\mathrm{J}_n &= \Big[-\frac{n}{\zeta(r)(r-2)t^{r-2}} f(t)^{n-1}\Big]_\alpha^{n_r} + \int_\alpha^{n_r} \frac{n(n-1)}{\zeta(r)^2(r-2)t^{2r-2}} f(t)^{n-2}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{n_r}{\zeta(r)(r-2)} f\left(n_r\right)^{n-1} + \int_\alpha^{n_r} \frac{n(n-1)}{\zeta(r)^2(r-2)t^{2r-2}} f(t)^{n-2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On retrouve bien les termes (11) et (12) du lemme pour $j = 1$. Soit $j \in \{1, \ldots, n-2\}$ pour lequel l'égalité est vraie. Montrons qu'elle l'est aussi pour l'entier $j+1$. Calculons l'intégrale (12) du lemme à l'aide d'une intégration par parties, à la constante multiplicative $\dfrac{n\,!}{(n-j-1)\,!\,\zeta(r)^{j+1}\mathfrak{p}_j}$ près. Les fonctions

$$t \longmapsto \frac{-1}{((j+1)(r-1)-1)t^{(j+1)(r-1)-1}} \qquad \text{et} \qquad t \longmapsto f(t)^{n-j-1}$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\alpha, n_r]$, de dérivées respectives

$$t \longmapsto \frac{1}{t^{(j+1)(r-1)}} \qquad \text{et} \qquad t \longmapsto \frac{n-j-1}{\zeta(r)t^r} f(t)^{n-j-2}.$$

On peut donc intégrer par parties. Grâce à l'égalité $f(\alpha)^{n-j-1} = 0$, vraie car $n-j-1 > 0$, et l'égalité

$$(j+1)(r-1) - 1 + r = (j+2)(r-1),$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int_\alpha^{n_r} \frac{f(t)^{n-j-1}}{t^{(j+1)(r-1)}}\,\mathrm{d}t = &\frac{-f\left(n_r\right)^{n-j-1}}{((j+1)(r-1)-1)n_r^{(j+1)(r-1)-1}} \\ &+ \int_\alpha^{n_r} \frac{n-j-1}{\zeta(r)((j+1)(r-1)-1)t^{(j+2)(r-1)}} f(t)^{n-j-2}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

En multipliant enfin par

$$\frac{n\,!}{(n-j-1)\,!\,\zeta(r)^{j+1}\displaystyle\prod_{\ell=1}^{j}(\ell r - \ell - 1)},$$

et en utilisant la relation de Chasles (pour les sommes), on trouve que la propriété est héréditaire puisque

$$\Big(\prod_{\ell=1}^{j}(\ell r - \ell - 1)\Big)((j+1)(r-1)-1) = \prod_{\ell=1}^{j+1}(\ell r - \ell - 1)$$

et que

$$\frac{n\,!}{(n-j-1)\,!} \times (n-j-1) = \frac{n\,!}{(n-j-2)\,!}.$$

Le lemme est donc démontré. ***cqfd***

Dans toute la suite, nous notons respectivement S_n et K_n la somme (11) (au signe moins près) et l'intégrale (12) qui apparaissent dans le lemme **4** pour l'entier $j = n-1$, c'est-à-dire

$$\mathrm{S}_n := \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n\,!}{(n-k)\,!\,n_r^{kr-k-1}\zeta(r)^k\mathfrak{p}_k} f\left(n_r\right)^{n-k} \tag{13}$$

et

$$\mathrm{K}_n := \int_{\alpha}^{n_r} \frac{n\,!}{\zeta(r)^n \mathfrak{p}_{n-1} t^{(r-1)n}}\, \mathrm{d}t. \tag{14}$$

On commence par étudier l'intégrale K_n.

5.3. *Estimation de l'intégrale* K_n

L'intégrale (14) vaut

$$\mathrm{K}_n = \frac{n\,!}{\zeta(r)^n \mathfrak{p}_{n-1}} \int_{\alpha}^{n_r} \frac{\mathrm{d}t}{t^{n(r-1)}} = \frac{n\,!}{\zeta(r)^n \mathfrak{p}_n} \Big(\frac{1}{\alpha^{n(r-1)-1}} - \frac{n_r}{n^n} \Big). \tag{15}$$

Le corollaire **1** nous permet d'obtenir l'équivalent de K_n suivant.

Lemme 5. — *On a l'équivalence*

$$\mathrm{K}_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \left(\frac{1}{(r-1)\zeta(r)} \right)^{\frac{1}{r-1}} \Gamma \left(\frac{r-2}{r-1} \right) n_r.$$

Démonstration On estime séparément les deux termes apparaissant dans (15). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\mathfrak{p}_{\mathfrak{n}} \geqslant 1$ et $\dfrac{n\,!}{n^n} \leqslant 1$. De plus, $\dfrac{n_r}{\zeta(r)^n} \leqslant 1$ si n est suffisamment grand (puisque $\zeta(r) > 1$ et par croissances comparées). Donc, pour n assez grand

$$0 \leqslant \frac{n\,! \, n_r}{\zeta(r)^n \mathfrak{p}_n n^n} \leqslant 1. \tag{16}$$

De plus, on sait par définition de α que

$$\alpha^{n(r-1)-1} = \frac{1}{\alpha \zeta(r)^n (r-1)^n}.$$

En utilisant l'estimation de $\mathfrak{p}_n$ obtenue dans le corollaire 1, il vient

$$\frac{n\,!}{\zeta(r)^n \mathfrak{p}_n \alpha^{n(r-1)-1}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \alpha\, \Gamma \left(\frac{r-2}{r-1} \right) n_r. \tag{17}$$

Le lemme est alors une conséquence des deux estimations (16) et (17). ***cqfd***

Pour finir, nous étudions la somme S_n.

5.4. *Estimation de la somme* S_n

Le prochain lemme fournit un équivalent de la somme (13).

Lemme 6. — *On a l'équivalence*

$$\mathrm{S}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \Big(\frac{1}{(r-1)\zeta(r)}\Big)^{\frac{1}{r-1}} \Big[\Gamma\big(\frac{r-2}{r-1}\big) - \Gamma\big(\frac{r-2}{r-1}, \frac{1}{(r-1)\zeta(r)}\big)\Big] n_r.$$

Démonstration Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Pour tout $k \in \{1,\dots,n-1\}$, on dispose des égalités $n_r^{kr-k-1} = n^k n^{-1/(r-1)}$ et

$$\frac{f\,(n_r)^{n-k}}{n^k} = \frac{f\,(n_r)^{n}}{n^k\left(1-\frac{1}{(r-1)\zeta(r)n}\right)^k} = \frac{f\,(n_r)^{n}\,\zeta(r)^k(r-1)^k}{\left((r-1)\zeta(r)n-1\right)^k}.$$

La somme (13) vaut donc

$$\mathrm{S}_n = n_r f\,(n_r)^n \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n\,!\,(r-1)^k}{(n-k)\,!\,\mathfrak{p}_k((r-1)\zeta(r)n-1)^k}}_{\text{notée } \mathrm{T}_n}\,. \tag{18}$$

Nous décomposons la dernière somme T_n de la manière suivante :

$$\mathrm{T}_n = \underbrace{\sum_{k=1}^{n^{1/4}} \frac{n\,!\,(r-1)^k}{(n-k)\,!\,\mathfrak{p}_k((r-1)\zeta(r)n-1)^k}}_{\text{notée } \mathrm{T}_{1,n}} + \underbrace{\sum_{n^{1/4}<k\leqslant n-1} \frac{n\,!\,(r-1)^k}{(n-k)\,!\,\mathfrak{p}_k((r-1)\zeta(r)n-1)^k}}_{\text{notée } \mathrm{T}_{2,n}}$$

et l'on estime les deux sommes séparément.

$\triangleright$ **Estimation de** $\mathrm{T}_{2,n}$

Comme $\zeta(r) > 1$, on a l'inégalité $(r-1)\zeta(r)n - 1 \geqslant (r-1)n$ à partir d'un certain rang et donc

$$0 \leqslant \mathrm{T}_{2,n} \leqslant \sum_{n^{1/4}<k\leqslant n-1} \frac{n\,!}{(n-k)\,!\,n^k\mathfrak{p}_k} \leqslant \sum_{k=n^{1/4}}^{+\infty} \frac{1}{\mathfrak{p}_k}$$

car, pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, on a l'inégalité $\dfrac{n\,!}{(n-k)\,!\,n^k} \leqslant 1$. Or la série de terme général $\dfrac{1}{\mathfrak{p}_k}$ est convergente d'après le corollaire **1** et donc la suite $(\mathrm{T}_{2,n})_{n\geqslant1}$ converge vers 0.

$\triangleright$ **Estimation de** $\mathrm{T}_{1,n}$

Soit k un entier de l'intervalle $[1, n^{1/4}]$. Alors

$$\frac{n\,!\,(r-1)^k}{(n-k)\,!\,((r-1)\zeta(r)n-1)^k} = \frac{1}{\zeta(r)^k} \underbrace{\prod_{\ell=0}^{k-1} \left(\frac{(n-\ell)(r-1)\zeta(r)}{(r-1)\zeta(r)n-1}\right)}_{\text{noté } \mathfrak{q}_{n,k}}.$$

Étudions maintenant le produit $\mathfrak{q}_{n,k}$:

$$\begin{aligned}
\ln\left(\mathfrak{q}_{n,k}\right) &= \sum_{\ell=0}^{k-1} \ln\left(1 + \frac{1-(r-1)\zeta(r)\ell}{(r-1)\zeta(r)n-1}\right)\\
&= \sum_{\ell=0}^{k-1} \Big(\frac{1-(r-1)\zeta(r)\ell}{(r-1)\zeta(r)n-1} + \mathcal{O}\big(\frac{\ell^2}{n^2}\big)\Big)\\
&= \sum_{\ell=0}^{k-1} \Big(\frac{-(r-1)\zeta(r)\ell}{(r-1)\zeta(r)n-1} + \mathcal{O}\big(\frac{1}{n}\big)\Big),
\end{aligned}$$

car $\ell^2 \leqslant k^2 \leqslant n$ et car $\dfrac{1}{(r-1)\zeta(r)n-1} \ll \dfrac{1}{n}$. De plus, pour tout $\ell \in \{0, \ldots, k-1\}$, on a

$$\frac{(r-1)\zeta(r)\ell}{(r-1)\zeta(r)n-1} = \frac{\ell}{n} \times \frac{1}{1-\frac{1}{(r-1)\zeta(r)n}} = \frac{\ell}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{\ell}{n^2}\Big)$$

et, comme $\dfrac{\ell}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n}$, il vient

$$\begin{aligned}
\ln\left(\mathfrak{q}_{n,k}\right) &= \sum_{\ell=0}^{k-1} \left(-\frac{\ell}{n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n}\Big)\right)\\
&= -\frac{k(k-1)}{2n} + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{n^{3/4}}\Big)\\
&= \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big),
\end{aligned}$$

car $k(k-1) \ll \sqrt{n}$ par définition de k. Par conséquent, $\mathfrak{q}_{n,k} = 1 + \mathcal{O}\Big(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\Big)$. On peut en déduire le développement asymptotique de $\mathrm{T}_{1,n}$ suivant :

$$\mathrm{T}_{1,n} = \sum_{k=1}^{n^{1/4}} \frac{1}{\zeta(r)^k \mathfrak{p}_k} \left(1 + \mathcal{O}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big)\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\zeta(r)^k \mathfrak{p}_k} + \mathrm{o}(1), \tag{19}$$

puisque la série numérique $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{\zeta(r)^k \mathfrak{p}_k}$ converge. La somme de cette série est calculée dans la proposition **8**. L'égalité (18), l'estimation (19), la convergence vers 0 de la suite $(\mathrm{T}_{2,n})_{n\geqslant 1}$ et la proposition **4** fournissent l'équivalent annoncé. ***cqfd***

5.5. *Estimation de* F_n *et fin de la démonstration du théorème*

Toutes les estimations précédemment obtenues au fil des différents lemmes vont nous permettre de trouver un équivalent de l'espérance de Z_n. Nous avons obtenu successivement

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_n &= n_r - \mathrm{H}_n + \mathcal{O}(1) && \text{d'après (8)} \\ &= n_r - \mathrm{I}_n + \mathrm{o}(n_r) && \text{d'après le lemme } \mathbf{2} \text{ et car } y < \frac{1}{r-1} \end{aligned}$$

puis, en utilisant la proposition **4** et le lemme **3**,

$$\mathrm{F}_n = \Big(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{(r-1)\zeta(r)}}\Big) n_r + \mathrm{J}_n + \mathrm{o}\left(n_r\right).$$

Or $\mathrm{J}_n = -\mathrm{S}_n + \mathrm{K}_n$ donc, en utilisant finalement les lemmes **5** et **6**, il vient

$$\mathrm{J}_n = \Big(\frac{1}{(r-1)\zeta(r)}\Big)^{\frac{1}{r-1}} \Gamma\Big(\frac{r-2}{r-1}, \frac{1}{(r-1)\zeta(r)}\Big) n_r + \mathrm{o}\left(n_r\right).$$

L'estimation de F_n est donc

$$\mathrm{F}_n = \bigg[1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{(r-1)\zeta(r)}} + \Big(\frac{1}{(r-1)\zeta(r)}\Big)^{\frac{1}{r-1}} \Gamma\Big(\frac{r-2}{r-1}, \frac{1}{(r-1)\zeta(r)}\Big)\bigg] n_r + \mathrm{o}\left(n_r\right).$$

On utilise pour finir le lemme **1** qui donne un développement asymptotique de G_n. On trouve alors que $\mathbb{E}(Z_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} c n_r$ où c est la constante annoncée dans le théorème 1.

6. Appendice

Dans cet ultime paragraphe, nous calculons les sommes des deux séries que nous avons évoquées dans les démonstrations du corollaire **1** et du lemme **6**. Celles-ci sont liées à la fonction Gamma d'Euler, qui est définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\forall x > 0 \qquad \Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t.$$

Cette fonction étend la factorielle aux nombres réels. Une intégration par parties montre effectivement que

$$\forall x > 0 \qquad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{20}$$

et comme $\Gamma(1) = 1$, on trouve en particulier que $\Gamma(k+1) = k\,!$ pour tout entier naturel k non nul.

En outre, on peut montrer que cette fonction peut s'écrire à l'aide d'un produit infini (on rappelle que γ désigne la constante d'Euler) :

$$\forall x > -1 \qquad \frac{1}{\Gamma(x+1)} = \mathrm{e}^{\gamma x} \prod_{n=1}^{+\infty} \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)\, \mathrm{e}^{-x/n}. \tag{21}$$

Nous aurons également besoin dans la suite de la fonction Bêta d'Euler définie par

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2 \qquad \mathrm{B}(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$$

Cette fonction est liée à la fonction Gamma de la façon suivante :

$$\forall (x,y) \in]0,+\infty[^2 \qquad \mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{22}$$

Nous renvoyons le lecteur à [1] ou [2] pour les démonstrations de ces différents résultats et pour plus d'informations sur les fonctions Gamma et Bêta d'Euler.

6.1. *La série entière* $\sum_{k\geqslant 2} \frac{\zeta(k)}{k} x^k$

La série entière $\sum_{k\geqslant 2} \frac{\zeta(k)}{k} x^k$ a un rayon de convergence égal à 1. Nous pouvons calculer sa somme à l'aide de (21). Dans la démonstration du corollaire **1**, nous appliquons le résultat suivant pour $x = \frac{1}{r-1}$.

Proposition 6. — *Pour tout* $x \in]-1,1[$*, on a l'égalité*

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\zeta(k)}{k} x^k = \ln\big(\Gamma(1-x)\big) - \gamma x.$$

Démonstration Soit $x \in]-1,1[$. D'après (21), on a

$$\begin{aligned}\ln\big(\Gamma(1-x)\big) &= \gamma x - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) + \frac{x}{n}\right)\\ &= \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^k}{kn^k},\end{aligned}$$

grâce au développement en série entière de $\ln$. La famille $\left(\frac{x^k}{kn^k}\right)_{(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ étant sommable, on peut permuter les symboles sommes :

$$\ln\big(\Gamma(1-x)\big) = \gamma x + \sum_{k=2}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^k}\right)\frac{x^k}{k} = \gamma x + \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\zeta(k)}{k}x^k,$$

d'où le résultat. ***cqfd***

Remarque. Les calculs précédents restent valables pour $x=-1$. Comme $\Gamma(2)=1$, on trouve que

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(-1)^k\zeta(k)}{k}=\gamma.$$

6.2. *Une série liée aux produits* $\mathfrak{p}_k$

Afin d'expliciter la valeur de la constante c du théorème **1**, nous aurons encore besoin d'utiliser une autre expression des produits $\mathfrak{p}_n$ en lien avec la fonction Γ d'Euler.

Proposition 7. — *Pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité*

$$\mathfrak{p}_n=\frac{(r-1)^n\Gamma\left(n+\frac{r-2}{r-1}\right)}{\Gamma\left(\frac{r-2}{r-1}\right)}.$$

Démonstration Soit $n\in\mathbb{N}^*$. L'identité découle de (20) ; en l'appliquant n fois, on obtient

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{r-2}{r-1}\right)&=\Gamma\left(\frac{r-2}{r-1}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(k+\frac{r-2}{r-1}\right)\\&=\frac{\Gamma\left(\frac{r-2}{r-1}\right)}{(r-1)^n}\prod_{k=0}^{n-1}\big((r-1)k+r-2\big)\\&=\frac{\Gamma\left(\frac{r-2}{r-1}\right)}{(r-1)^n}\mathfrak{p}_n,\end{aligned}$$

en utilisant le changement d'indice $k=\ell-1$. ***cqfd***

Cette expression des produits va nous permettre de calculer la somme de la série de terme général $\dfrac{1}{\zeta(r)^k\mathfrak{p}_k}$, utilisée dans la démonstration du lemme **6**.

Proposition 8. — *La fonction Gamma incomplète étant définie dans l'introduction, on a l'égalité*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\zeta(r)^k\mathfrak{p}_k}=\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{(r-1)\zeta(r)}}}{\big((r-1)\zeta(r)\big)^{\frac{1}{r-1}}}\Big[\Gamma\big(\frac{r-2}{r-1}\big)-\Gamma\big(\frac{r-2}{r-1},\frac{1}{(r-1)\zeta(r)}\big)\Big].$$

Démonstration On pose $s := \dfrac{r-2}{r-1}$. Considérons la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad \varphi(x) := x^{1-s}\,\mathrm{e}^{x} \int_0^x t^{s-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour tout entier naturel k, la fonction $f_k : t \longmapsto \dfrac{(-1)^k}{k\,!} t^{k+s-1}$ est intégrable sur $[0,x]$ et la série de terme général $\displaystyle\int_0^{|x|} |f_k(t)|\,\mathrm{d}t$ converge puisque

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \int_0^x |f_k(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{x^{k+s}}{k\,!\,(k+s)} \leqslant \frac{x^k}{k\,!} x^s.$$

On a donc, en permutant l'intégrale et la série issue du développement en série entière de l'exponentielle,

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x^{1-s}\,\mathrm{e}^{x} \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{(-1)^k}{k\,!} t^{k+s-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{e}^{x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k\,!\,(k+s)} x^{k+1}.\end{aligned}$$

En développant l'exponentielle en série entière et en faisant le produit, on obtient

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{\Big(\sum_{\ell=0}^{k-1} \frac{(-1)^\ell}{\ell\,!\,(\ell+s)(k-1-\ell)\,!}\Big)}_{\text{noté } c_k} x^k$$

où, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le coefficient c_k vaut

$$\begin{aligned}c_k &= \frac{1}{(k-1)\,!} \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k-1}{\ell} (-1)^\ell \int_0^1 t^{s-1+\ell}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{(k-1)\,!} \int_0^1 t^{s-1}(1-t)^{k-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\mathrm{B}(s,k)}{\Gamma(k)}.\end{aligned}$$

En utilisant le lien (22) entre les fonctions Bêta et Gamma, il vient

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(k+s)} x^k.$$

En remplaçant x par $\dfrac{1}{(r-1)\zeta(r)}$ dans cette égalité et en utilisant la proposition **7**, on obtient le résultat souhaité. ***cqfd***

Références

[1] J. DIEUDONNÉ, *Calcul infinitésimal,* Hermann

[2] J. MOISAN, A. VERNOTTE, N. TOSEL, *Suites et séries de fonctions,* Ellipses

Erratum, RMS 130-4, p. 27

Dans l'article *Réduites et réduites secondaires dans un développement en fraction continue*, de Christophe Leuridan, la rédaction a introduit une coquille qui rend l'alinéa 2 du théorème **1**, p. 27, vide de sens. Il faut supprimer le « si ...alors » de l'assertion, puisque C^+ et C^- ont été définis au préalable. La version correcte est celle de l'auteur :

$C_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : y \leqslant f_-(x)\}$ est l'hypographe de f_- et $C_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} : y \geqslant f_+(x)\}$ est l'épigraphe de f_+.