Continuité des opérateurs de multiplication et de composition sur l'espace de Hardy $H^2(\mathbb{D})$[†]

par Maxime Bailleul et Vincent Devinck

professeur en MP au lycée Robespierre à Arras et professeur en MPSI au lycée Mariette à Boulogne-sur-Mer

RÉSUMÉ. *Nous présentons les opérateurs de multiplication M_φ et de composition C_φ par le symbole φ sur l'espace de Hardy du disque $H^2(\mathbb{D})$. Nous démontrons que ces opérateurs sont des applications linéaires continues sur $H^2(\mathbb{D})$ en utilisant des techniques élémentaires d'analyse complexe et d'analyse fonctionnelle. Nous calculons la norme de M_φ puis celle de C_φ lorsque φ fixe l'origine et lorsque φ est un automorphisme du disque.*

ABSTRACT. Continuity of multiplication and composition operators on the Hardy space $H^2(\mathbb{D})$

In this paper, we introduce the multiplication and composition operators M_φ and C_φ, associated to a symbol φ, on the famous Hardy space $H^2(\mathbb{D})$. By using elementary tools of complex and functional analysis, we prove that these operators are bounded on $H^2(\mathbb{D})$. Furthermore, the operator norm of M_φ is computed, as well as the norm of C_φ, when 0 is a fixed point of the symbol and when φ is an automorphism of $\mathbb{D}$.

MOTS-CLÉS : *espace de Hardy, opérateur de composition.*

1. Introduction et notations

Les applications les plus simples que l'on puisse considérer entre deux espaces vectoriels (normés) sont celles qui sont linéaires. Étant donnée une telle application, il est naturel de s'interroger quant à sa continuité. Cette question peut être assez complexe, nécessitant l'utilisation de nombreux outils. L'intérêt de cet article est de mener cette étude pour deux types

[†]2010 Mathematics Subject Classification : 47A30, 47B33, 30H10

d'opérateurs : les opérateurs de multiplication et les opérateurs de composition, sur un espace de Banach particulier, à savoir l'espace de Hardy du disque que nous définirons dans la suite.

Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés (complexes) et $T : X \longrightarrow Y$ une application. Nous noterons toujours Tx (au lieu de $T(x)$) l'image du vecteur x de X par T dans Y pour gagner en légèreté. On dira que T est un opérateur linéaire *borné* de X dans Y si

- ⋆ T est une application linéaire ;
- ⋆ T est continue sur X, ce qui se traduit par l'existence d'un nombre réel strictement positif M tel que
$$\forall x \in X, \qquad \|Tx\|_Y \leqslant M\|x\|_X$$
(de façon équivalente, l'application linéaire T est bornée sur la boule unité).

Dans ce cas, on appelle *norme* de T, et on note $\|T\|$, le nombre

$$\|T\| = \inf\left\{M \in \mathbb{R}_+^* \,\middle|\, \forall x \in X,\ \|Tx\|_Y \leqslant M\|x\|_X\right\} < +\infty,$$

et on a alors l'égalité

$$\|T\| = \sup\left\{\|Tx\|_Y \,\middle|\, \|x\|_X \leqslant 1\right\}.$$

L'espace vectoriel des opérateurs linéaires bornés de X dans Y est noté $\mathcal{B}(X, Y)$ (et plus simplement $\mathcal{B}(X)$ lorsque $X = Y$). Il est facile de démontrer que $\mathcal{B}(X, Y)$, muni de la norme d'opérateur précédemment définie, est un espace de Banach lorsque $(Y, \|\cdot\|_Y)$ en est un. Mais nous devons définir la notion d'espace de Banach. Si $(X, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé (réel ou complexe), on dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X est une *suite de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \qquad n \geqslant n_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \|x_{m+n} - x_n\| \leqslant \varepsilon.$$

Cette notion est plus faible que celle de suite convergente : si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $(X, \|\cdot\|)$, alors c'est une suite de Cauchy. Les espaces vectoriels normés pour lesquels la réciproque est vraie sont qualifiés de *complets*. On dit aussi que ce sont des *espaces de Banach*. Ainsi, $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach si toute suite de Cauchy de vecteurs de X est convergente. Par exemple, tout espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni de n'importe quelle norme, est un espace de Banach. Pour plus d'informations et d'exemples sur cette notion, nous renvoyons le lecteur par exemple à [3].

Lorsque l'on considère un espace X de fonctions réelles ou complexes, il y a deux types d'applications linéaires que l'on peut naturellement définir sur cet espace. Étant donnée une fonction φ, on peut considérer :

- l'opérateur de multiplication M_φ par φ sur X défini par
$$\forall f \in X, \qquad M_\varphi f = \varphi \times f;$$

- l'opérateur de composition C_φ par φ sur X défini par

$$\forall f \in X, \qquad C_\varphi f = f \circ \varphi.$$

Plusieurs questions se posent alors : sous quelle(s) condition(s) sur le *symbole* φ ces deux applications sont-elles bien définies, c'est-à-dire sont telles que la composition $f \circ \varphi$ soit licite et telles que les fonctions $M_\varphi f$ et $C_\varphi f$ définissent bien de nouveaux éléments de X ? Dans ce cas, les applications linéaires M_φ et C_φ sont-elles continues ? Enfin, peut-on calculer leur norme ? Dans cette note, nous nous attachons à répondre à ces questions lorsque X est l'espace de Hardy du disque $H^2(\mathbb{D})$. Il s'agit d'un ensemble de fonctions développables en série entière en 0 sur le disque ouvert du plan complexe de centre 0 et de rayon 1 dont les coefficients dans le développement en série entière en 0 vérifient une certaine condition de sommabilité. Cet espace est présenté dans le paragraphe 2.

Introduisons maintenant quelques notations. Pour tout nombre réel r strictement positif, nous désignerons par $D(0,r)$ (respectivement $\overline{D}(0,r)$) le disque ouvert (respectivement fermé) du plan complexe de centre 0 et de rayon r, c'est-à-dire

$$D(0,r) = \big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| < r\big\} \qquad \big(\text{respectivement } \overline{D}(0,r) = \big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| \leqslant r\big\}\big).$$

Le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 sera plus simplement noté $\mathbb{D}$:

$$\mathbb{D} = \big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| < 1\big\}.$$

La frontière de $\mathbb{D}$, notée $\mathbb{T}$, est le cercle du plan complexe de centre 0 et de rayon 1 :

$$\mathbb{T} = \big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, |z| = 1\big\}.$$

Notre objectif principal est de démontrer les deux résultats suivants :

Théorème 1. — *Soit φ une fonction développable en série entière en 0 sur $\mathbb{D}$ et bornée sur $\mathbb{D}$. Alors l'opérateur de multiplication M_φ est un opérateur linéaire borné sur $H^2(\mathbb{D})$ et*

$$\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty.$$

Théorème 2. — *Soit φ une application développable en série entière en 0 sur $\mathbb{D}$ telle que $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Alors l'opérateur de composition C_φ est borné sur $H^2(\mathbb{D})$ et*

$$\|C_\varphi\| \leqslant \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}.$$

Ce deuxième théorème, appelé Théorème de subordination de Littlewood (1925), est le premier résultat relatif à la continuité des opérateurs de composition sur les espaces de fonctions. On trouve la démonstration de ce résultat dans de nombreux livres sur les opérateurs de composition (voir par exemple [5]) mais toutes les preuves utilisent des résultats d'analyse complexe basés sur la notion d'*holomorphie*, dérivabilité au sens complexe des fonctions

d'une variable complexe (voir [1]). Comme il n'est pas nécessaire de parler explicitement de *fonction holomorphe* pour introduire l'espace de Hardy du disque $H^2(\mathbb{D})$, nous prenons le parti d'exposer la preuve du Théorème de Littlewood en utilisant uniquement des notions de classe préparatoire.

Dans le paragraphe 2, nous présentons l'espace de fonctions sur lequel nous allons étudier la continuité des opérateurs de multiplication et de composition. La norme sur cet espace de Banach possède deux représentations différentes. Nous verrons que la *forme intégrale* (Proposition 4) permet de montrer facilement que l'opérateur de multiplication M_φ est borné sur $H^2(\mathbb{D})$ (Théorème 1). Nous calculons explicitement la norme de cet opérateur. Dans un troisième paragraphe, nous exposons deux petits résultats d'analyse complexe. Tout d'abord les inégalités de Cauchy, qui permettent de comparer les coefficients d'une série entière avec la taille maximale que peut prendre la somme de la série entière sur chaque disque inclus dans le disque de convergence (Lemme 1). Ces inégalités sont la clé pour traiter la composition des fonctions développables en série entière (Proposition 6). Nous exposons ensuite l'égalité de la moyenne (Lemme 2) qui nous sera utile pour estimer la norme de l'opérateur de composition C_φ. À la fin de ce paragraphe, nous donnons diverses propriétés d'applications développables en série entière particulières, les automorphismes du disque, qui seront déterminants pour démontrer le Théorème 2. Enfin, dans le paragraphe 4, nous commençons par exposer le plan de la démonstration du Théorème 2 concernant la continuité des opérateurs de composition sur $H^2(\mathbb{D})$ puis nous démontrons le résultat dans deux cas particuliers, celui où le symbole φ fixe l'origine (Théorème 3) et lorsque φ est un automorphisme du disque (Théorème 4), avant d'en déduire notre résultat principal (Théorème 2).

2. L'espace $H^2(\mathbb{D})$

Commençons par définir l'espace de fonctions avec lequel nous allons travailler tout au long de l'article.

2.1. *Présentation*

L'espace de Hardy du disque, noté $H^2(\mathbb{D})$, est l'ensemble des fonctions développables en série entière en 0 et dont les coefficients (complexes) de ce développement sont de carrés sommables. Ainsi, une fonction $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ appartient à $H^2(\mathbb{D})$ si et seulement s'il existe une suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{D}, \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty.$$

Donnons quelques exemples de fonctions classiques appartenant (ou n'appartenant pas) à $H^2(\mathbb{D})$.

Exemple 1. —

1. *Les fonctions* $z \longmapsto \dfrac{1}{1 \pm z}$ *n'appartiennent pas à* $H^2(\mathbb{D})$. *En effet, pour tout* $z \in \mathbb{D}$, *on a* $\dfrac{1}{1 \pm z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (\pm 1)^n z^n$ *mais la série* $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} 1$ *diverge* (*grossièrement*).

2. *La fonction* $f : z \longmapsto \ln(1 - z)$ *appartient à* $H^2(\mathbb{D})$ *car*

$$\forall z \in \mathbb{D}, \qquad f(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} \qquad \textit{et} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

3. *De même, les fonctions exponentielle, cosinus et sinus* (*complexes*) *appartiennent à* $H^2(\mathbb{D})$.

4. *Une application poynômiale appartient à* $H^2(\mathbb{D})$ (*puisqu'un polynôme a un nombre fini de coefficients non nuls*).

Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres complexes de carrés sommables, alors cette suite est bornée et la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$ converge (absolument) sur $\mathbb{D}$. Il existe donc une fonction développable en série entière en 0 sur $\mathbb{D}$ dont la suite des coefficients dans le développement en série entière est $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il y a aussi unicité d'une telle fonction par unicité des coefficients dans le développement en série entière d'une fonction en un point. Ainsi, en notant $\ell^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites complexes de carré sommable, c'est-à-dire

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \Big\{ a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \;\Big|\; \|a\| = \big(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 \big)^{1/2} < +\infty \Big\},$$

on en déduit que l'application

$$\begin{cases} \ell^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{D}) \\ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & \Big(z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \Big) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Une conséquence est que l'ensemble $H^2(\mathbb{D})$, muni de la norme

$$\|f\|_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} \qquad (f \in H^2(\mathbb{D}))$$

est un espace de Banach (puisqu'il est connu que $(\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|)$ en est un).

Lorsque nous estimerons la norme des opérateurs de composition, nous évaluerons ces opérateurs sur les applications polynomiales puis nous utiliserons le fait que ces fonctions particulières forment un sous-espace vectoriel dense de $H^2(\mathbb{D})$.

Proposition 1. — *On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications polynomiales de $H^2(\mathbb{D})$. L'ensemble $\mathcal{P}$ est dense dans $H^2(\mathbb{D})$.*

Démonstration. Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$. Il existe une suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{D}, \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \qquad \text{où} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty$$

En considérant, pour tout entier naturel N, le polynôme $f_N : z \longmapsto \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$, alors $f - f_N \in H^2(\mathbb{D})$ et

$$\|f - f_N\|^2 = \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|^2 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

puisque la série de terme général $|a_n|^2$ est convergente. ***cqfd***

Sur l'espace $H^2(\mathbb{D})$, on peut démontrer que l'application $< \cdot, \cdot >$ définie par

$$\forall (f,g) \in H^2(\mathbb{D})^2, \qquad < f, g >= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \overline{b_n}, \tag{1}$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les coefficients dans le développement en série entière en 0 sur $\mathbb{D}$ des fonctions f et g, est un produit scalaire (la convergence de la série est une conséquence directe de l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Comme la norme sur $H^2(\mathbb{D})$ dérive d'un produit scalaire (au sens où, pour tout $f \in H^2(\mathbb{D})$, on a l'égalité $\|f\|_2 = \sqrt{< f, f >}$), on dit que $H^2(\mathbb{D})$, muni de ce produit scalaire, est un *espace de Hilbert* (*complexe*). Nous avons le résultat très élémentaire suivant.

Proposition 2. —

1. *Les monômes $z \longmapsto z^n$ $(n \in \mathbb{N})$ sont deux à deux orthogonaux dans $H^2(\mathbb{D})$.*
2. *Si $g \in H^2(\mathbb{D})$ est telle que $g(0) = 0$, alors g est orthogonale à toute fonction constante de $H^2(\mathbb{D})$ et on a*
$$\forall c \in \mathbb{C}, \qquad \|c + g\|_2^2 = |c|^2 + \|g\|_2^2.$$

Démonstration. Le premier point est évident par définition du produit scalaire dans $H^2(\mathbb{D})$. Si $g \in H^2(\mathbb{D})$ est telle que $g(0) = 0$, alors il existe une suite de nombres complexes $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de carrés sommables telle que

$$\forall z \in \mathbb{D}, \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$$

et donc, pour tout $c \in \mathbb{C}$, on a

$$< g, c >= 0 \times c + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \times 0 = 0.$$

D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\|c+g\|_2^2 = |c|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^2 = |c|^2 + \|g\|_2^2$$

ce qui était annoncé. ***cqfd***

2.2. *Continuité de l'évaluation*

Pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{D}$, considérons l'application

$$\delta_z : \left\{ \begin{array}{ccc} H^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & f(z) \end{array} \right.$$

appelée *évaluation au point* z. Cette application est clairement linéaire. Nous pouvons facilement démontrer qu'elle est continue sur $H^2(\mathbb{D})$ et calculer sa norme.

Proposition 3. — *Pour tout $z \in \mathbb{D}$, la forme linéaire δ_z est continue sur $H^2(\mathbb{D})$ et on a*

$$\|\delta_z\| = \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}.$$

Démonstration. Fixons $z \in \mathbb{D}$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n| \leqslant \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |z|^{2n} \right)^{1/2} = \frac{\|f\|_2}{\sqrt{1-|z|^2}} < +\infty.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|\delta_z(f)| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n z^n| \leqslant \frac{\|f\|^2}{\sqrt{1-|z|^2}}.$$

Démontrons maintenant l'égalité. Considérons la fonction f_z définie par

$$\forall w \in \mathbb{D}, \qquad f_z(w) = \frac{1}{1-\overline{z}w} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{z}^n w^n.$$

Cette fonction appartient à $H^2(\mathbb{D})$ car

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\overline{z}^n|^2 = \frac{1}{1-|z|^2} < +\infty$$

et on a alors

$$\|\delta_z\| \geqslant \frac{|f_z(z)|}{\|f_z\|_2} = \frac{\frac{1}{1-|z|^2}}{\left(\frac{1}{1-|z|^2}\right)^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}},$$

ce qui nous donne l'égalité. ***cqfd***

La bornitude de l'application d'évaluation nous sera utile à plusieurs reprises au cours de l'article, notamment pour trouver la valeur de la norme de l'opérateur de multiplication (Théorème 1). Elle permet également de montrer que la convergence dans $H^2(\mathbb{D})$ entraîne la convergence uniforme sur tout compact.

Corollaire 1. — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $H^2(\mathbb{D})$ qui converge vers $f \in H^2(\mathbb{D})$ dans $H^2(\mathbb{D})$. Alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f uniformément sur tout compact de $\mathbb{D}$.*

Démonstration. Soient K un sous-ensemble compact de $\mathbb{D}$ et $z \in K$. Pour tout entier naturel n, on a par continuité de l'application δ_z sur $H^2(\mathbb{D})$ (Proposition 3) :

$$|f_n(z) - f(z)| = |\delta_z(f - f_n)| \leqslant \|\delta_z\| \, \|f - f_n\|_2.$$

En prenant la borne supérieure sur les nombres complexes z appartenant a K, il vient

$$\sup_{z\in K} |f_n(z) - f(z)| \leqslant (\sup_{z\in K} \|\delta_z\|) \, \|f - f_n\|_2.$$

Or on a

$$\sup_{z\in K} \|\delta_z\| = \sup_{z\in K} \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}} = \max_{z\in K} \frac{1}{\sqrt{1-|z|^2}} < +\infty$$

car $z \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-|z|^2}}$ est continue sur le compact K. Par hypothèse, $\|f - f_n\|_2$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{z\in K} |f_n(z) - f(z)| = 0$$

ce qui démontre le corollaire. ***cqfd***

En particulier, la convergence dans $H^2(\mathbb{D})$ entraîne donc la convergence ponctuelle dans $\mathbb{D}$.

2.3. *Une autre expression de la norme*

Dans la proposition suivante, nous donnons une expression intégrale de la norme d'un élément de $H^2(\mathbb{D})$. Nous verrons que cette nouvelle représentation est particulièrement adaptée pour estimer la norme d'un opérateur de composition (Théorème 4) ou pour montrer que l'opérateur de multiplication est borné sur $H^2(\mathbb{D})$ (Théorème 1).

Proposition 4. — *Soit f une fonction développable en série entière en 0 sur $\mathbb{D}$. Alors*

$$f \in H^2(\mathbb{D}) \iff \sup_{0\leqslant r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \,\mathrm{d}\theta < +\infty.$$

Dans ce cas,

$$\|f\|_2 = \Big(\sup_{0\leqslant r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \,\mathrm{d}\theta\Big)^{1/2}.$$

Démonstration. Soit $r \in [0,1[$. Nous poserons dans la suite

$$M(f,r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \,\mathrm{d}\theta. \tag{2}$$

Si l'on note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des coefficients dans le développement en série entière de f en 0 sur $\mathbb{D}$, alors

$$\begin{aligned} M(f,r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{m,n\geqslant 0} a_m\overline{a_n} r^{m+n} e^{i(m-n)\theta} \,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{m,n\geqslant 0} a_m\overline{a_n} r^{m+n} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} \,\mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{3}$$

car les séries de fonctions $\displaystyle\sum_{m\geqslant 0} a_m \sum_{n\geqslant 0} \overline{a_n} r^{m+n} e^{i(m-n)\theta}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_m\overline{a_n} r^{m+n} e^{i(m-n)\theta}$ (pour $m \geqslant 0$ fixé) sont normalement convergentes sur l'intervalle $[0,2\pi]$. L'intégrale dans (3) vaut

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} \,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n \end{cases}$$

donc

$$M(f,r) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}. \tag{4}$$

Si $f \in H^2(\mathbb{D})$, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} |a_n|^2$ est convergente et donc, comme $r \in [0,1[$, l'égalité (4) fournit les relations

$$\sup_{0\leqslant r<1} M(f,r) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 = \|f\|_2^2 < +\infty.$$

Réciproquement, supposons que $\sup_{0\leqslant r<1} M(f,r) < +\infty$. Pour tout entier naturel N et pour tout $r \in [0,1[$, nous avons

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 r^{2n} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} = M(f,r).$$

Comme la fonction $r \longmapsto \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 r^{2n}$ est croissante, on obtient en prenant la borne supérieure sur les nombres $r \in [0,1[$,

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 \leqslant \sup_{0\leqslant r<1} M(f,r).$$

Il s'en ensuit donc que la série de terme général $|a_n|^2$ est convergente et, en faisant tendre N vers $+\infty$, nous obtenons :

$$f \in H^2(\mathbb{D}) \qquad \text{et} \qquad \|f\|_2^2 \leqslant \sup_{0\leqslant r<1} M(f,r).$$

Ceci achève la démonstration de la Proposition 4. ***cqfd***

Remarque. D'après l'égalité (4), la fonction $r \longmapsto M(f,r)$ est croissante. Cette observation nous permettra d'écrire, pour une application polynomiale f (dont le rayon de convergence est infini), l'égalité

$$\sup_{0\leqslant r<1} M(f\circ\varphi, r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\varphi(e^{i\theta}))|^2 \,\mathrm{d}\theta$$

dans la preuve du Théorème 4.

La représentation intégrale de la norme fournie par la Proposition 4 nous permet de donner de nouveaux exemples de fonctions appartenant à $H^2(\mathbb{D})$.

Proposition 5. — *Toute fonction développable en série entière en* 0 *sur* $\mathbb{D}$ *qui est bornée sur* $\mathbb{D}$ *appartient à* $H^2(\mathbb{D})$.

Démonstration. Soit f une fonction vérifiant les hypothèses. Il existe un nombre réel positif M tel que pour tout $z \in \mathbb{D}$, on ait $|f(z)| \leqslant M$. Pour tout $r \in [0,1[$, on a alors

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \,\mathrm{d}\theta \leqslant M^2$$

et ainsi

$$\left(\sup_{0\leqslant r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \,\mathrm{d}\theta\right)^{1/2} \leqslant M.$$

La fonction f appartient donc à $H^2(\mathbb{D})$. ***cqfd***

2.4. *Une application : continuité de l'opérateur de multiplication sur* $H^2(\mathbb{D})$

La forme intégrale de la norme d'un élément de $H^2(\mathbb{D})$ permet aussi de régler facilement la question de la continuité de l'opérateur de multiplication sur $H^2(\mathbb{D})$. Plus précisément, nous allons montrer que

$$M : \left\{ \begin{array}{ccc} H^\infty(\mathbb{D}) & \longrightarrow & \mathcal{B}(H^2(\mathbb{D})) \\ \varphi & \longmapsto & M_\varphi \end{array} \right.$$

est un morphisme d'algèbres isométrique. On a ici noté $H^\infty(\mathbb{D})$ l'ensemble des fonctions développables en série entière en 0 sur $\mathbb{D}$ et bornées sur $\mathbb{D}$.

Théorème 1. — *Soit $\varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$. Pour toute fonction f de $H^2(\mathbb{D})$, on pose*

$$M_\varphi f = \varphi \times f.$$

Alors M_φ est un opérateur linéaire borné sur $H^2(\mathbb{D})$ et

$$\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty.$$

Démonstration.

⋆ Le caractère linéaire de l'application M_φ est évident. La fonction φ étant bornée sur $\mathbb{D}$, on a

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{z\in\mathbb{D}} |\varphi(z)| < +\infty.$$

Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$. Tout d'abord, la fonction $\varphi \times f$ est développable en série entière en 0 sur $\mathbb{D}$ comme produit de fonctions qui le sont. De plus, pour tout $r \in [0, 1[$, on a

$$\int_0^{2\pi} \left|(\varphi f)(re^{i\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \left|\varphi(re^{i\theta})\right|^2 \left|f(re^{i\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta \leqslant \|\varphi\|_\infty^2 \int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 \mathrm{d}\theta.$$

En prenant la borne supérieure sur les nombres $r \in [0, 1[$, on en déduit alors que la fonction $M_\varphi f$ appartient à $H^2(\mathbb{D})$ et que

$$\|M_\varphi f\|_2 \leqslant \|\varphi\|_\infty \|f\|_2.$$

Par conséquent, l'application linéaire M_φ est bornée sur $H^2(\mathbb{D})$ et $\|M_\varphi\| \leqslant \|\varphi\|_\infty$.

⋆ Il s'agit maintenant d'établir l'égalité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En évaluant l'application M_{φ^n} en la fonction constante égale à 1 notée $\mathbf{1}$ (qui appartient bien à $H^2(\mathbb{D})$), on trouve que

$$\|M_{\varphi^n}\mathbf{1}\|_2 \leqslant \|M_{\varphi^n}\| \times \|\mathbf{1}\|_2 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \|\varphi^n\|_2 \leqslant \|M_{\varphi^n}\| \leqslant \|M_\varphi\|^n$$

En effet, la dernière inégalité s'obtient par une récurrence immédiate.

Fixons maintenant $z \in \mathbb{D}$. Comme l'application d'évaluation δ_z est bornée (d'après la Proposition 3), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |\varphi(z)|^n = |\varphi^n(z)| \leqslant \frac{\|\varphi^n\|_2}{\sqrt{1-|z|^2}} \leqslant \frac{\|M_\varphi\|^n}{\sqrt{1-|z|^2}}.$$

On en déduit donc que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |\varphi(z)| \leqslant \frac{\|M_\varphi\|}{(1-|z|^2)^{1/2n}}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient le fait que $|\varphi(z)| \leqslant \|M_\varphi\|$. Cette inégalité étant valable pour tous les nombres complexes z de $\mathbb{D}$, on a bien $\|\varphi\|_\infty \leqslant \|M_\varphi\|$.

Finalement, $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$, ce qui achève la démonstration du Théorème 1. ***cqfd***

3. Un soupçon d'analyse complexe

Le reste de l'article est consacré à la démonstration du Théorème 2 sur la continuité de l'opérateur de composition sur $H^2(\mathbb{D})$. Nous commençons par donner quelques petits résultats autour des séries entières.

3.1. *Composition de fonctions développables en série entière*

Le résultat suivant compare la taille des coefficients d'une série entière avec l'ordre maximal de la série entière dans chaque disque contenu dans le disque de convergence de la série entière.

Lemme 1 (inégalités de Cauchy). — *Soient $R > 0$ et S une fonction développable en série entière en 0 sur $D(0,R)$ de développement* :

$$\forall z \in D(0,R), \qquad S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$

Pour tout $r \in]0,R[$, on pose $M(r) = \sup_{|z|\leqslant r} |S(z)|$. Alors

$$\forall r \in]0,R[,\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad |c_n| \leqslant \frac{M(r)}{r^n}.$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $r \in]0,R[$. Alors la série de terme général $c_k r^k$ converge absolument. Si pour tout entier naturel k, on considère la fonction

$$f_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \theta & \longmapsto & c_k r^k e^{i(k-n)\theta}, \end{array} \right.$$

alors la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} f_k$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$ (donc en particulier sur $[0,2\pi]$). Par conséquent,

$$\int_0^{2\pi} S(re^{i\theta}) e^{-in\theta}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k r^k \int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi c_n r^n. \tag{5}$$

Par ailleurs, l'inégalité triangulaire nous donne

$$\left| \int_0^{2\pi} S(re^{i\theta}) e^{-in\theta} \, \mathrm{d}\theta \right| \leqslant \int_0^{2\pi} \left| S(re^{i\theta}) \right| \mathrm{d}\theta \leqslant 2\pi M(r). \tag{6}$$

Les égalités (5) et les inégalités (6) conduisent au résultat souhaité. ***cqfd***

Pour que l'opérateur de composition C_φ sur $H^2(\mathbb{D})$ soit bien défini, il faut dans un premier temps que, lorsque l'on compose f avec le symbole φ (lorsque cette composition a un sens), la fonction résultante soit développable en série entière. C'est ce point que nous étudions dans la proposition suivante.

Proposition 6. — *Soient f et φ deux fonctions développables en séries entières en 0 sur $\mathbb{D}$. On suppose que $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Alors la fonction $f \circ \varphi$ est développable en série entière en 0 sur $\mathbb{D}$.*

Démonstration. La fonction f étant développable en série entière en 0 sur $\mathbb{D}$, il existe une suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que,

$$\forall z \in \mathbb{D}, \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Comme un produit de fonctions développables en série entière est développable en série entière (avec un rayon de convergence au moins égal au minimum de leurs rayons), on sait que, pour tout entier naturel n, la fonction φ^n est développable en série entière en 0 sur $\mathbb{D}$ et il existe donc une suite de nombres complexes $(b_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall z \in \mathbb{D}, \qquad \varphi(z)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{k,n} z^k.$$

Fixons un nombre réel r strictement compris entre 0 et 1. Nous allons montrer que la fonction $f \circ \varphi$ est développable en série entière en 0 sur $D(0,r)$. Tout d'abord, l'hypothèse $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ implique (par continuité de φ) que $\varphi\big(\overline{D}(0,r)\big)$ est un sous-ensemble compact de $\mathbb{D}$. Il existe donc un nombre réel $R \in]0,1[$ tel que $\varphi\big(\overline{D}(0,r)\big) \subset \overline{D}(0,R)$. Soit $z \in D(0,r)$. Alors

$$(f \circ \varphi)(z) = f(\varphi(z)) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \varphi(z)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sum_{k=0}^{+\infty} b_{k,n} z^k.$$

Nous souhaitons maintenant inverser l'ordre de sommation. Pour cela, il suffit d'établir que la série double de terme général $a_n b_{k,n} z^k$ est absolument convergente. D'après le Lemme 1, on sait que pour tout couple d'entiers naturels (k,n), nous avons

$$|b_{k,n}| \leqslant r^{-k} \sup_{|w|\leqslant r} |\varphi(w)^n| \leqslant \frac{R^n}{r^k}$$

car $\varphi\big(\overline{D}(0,r)\big) \subset \overline{D}(0,R)$. Or la série de terme général $|a_n| R^n$ converge (puisque $R \in]0,1[$), de même que la série géométrique de raison $|z|/r$ (puisque $|z| < r$). Ceci assure la

convergence annoncée de notre série double. Nous pouvons maitenant intervertir l'ordre de sommation et nous obtenons l'égalité

$$(f \circ \varphi)(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_{k,n} \Big) z^k$$

pour tout nombre complexe z tel que $|z| < r$ (et quel que soit le nombre $r \in]0,1[$ choisi). Cette égalité est donc valable pour tout $z \in \mathbb{D}$. Finalement, la fonction $f \circ \varphi$ est développable en série entière en 0 sur $\mathbb{D}$, ce qui achève la démonstration de la Proposition 6. ***cqfd***

3.2. *L'égalité de la moyenne*

Le résultat suivant affirme que la valeur en 0 d'une fonction développable en série entière est explicitement déterminée par les valeurs que prend la fonction sur tout cercle de centre 0 contenu dans le disque ouvert de convergence de la série entière associée.

Lemme 2 (égalité de la moyenne). — *Soit $R > 0$ et f une fonction développable en série entière en 0 sur le disque $D(0,R)$. Pour tout $r \in [0,R[$, on a l'égalité*

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta.$$

Démonstration. La fonction f étant développable en série entière en 0 sur $D(0,R)$, il existe une suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que,

$$\forall z \in D(0,R), \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Si pour tout entier naturel n, on considère la fonction $f_n : \theta \longmapsto a_n r^n e^{in\theta}$, alors la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur l'intervalle $[0,2\pi]$. On a donc

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{in\theta}\, \mathrm{d}\theta = 2\pi a_0$$

d'où le lemme. ***cqfd***

Pour finir, donnons quelques propriétés remarquables d'applications développables en série entière particulières : les automorphismes du disque.

3.3. *Les automorphismes du disque*

Pour tout nombre complexe $a \in \mathbb{D}$, on considère l'application

$$\varphi_a : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathbb{D} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}. \end{array} \right.$$

On a $\varphi_0 = \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}$. Remarquons que si $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, la fonction φ_a est développable en série entière en 0 dans $D(0, |a|^{-1})$. Les propriétés ci-dessous nous seront utiles dans la suite.

Proposition 7. — *Soit $a \in \mathbb{D}$.*

1. *L'application φ_a est bijective de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$ et $(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{-a}$. On dit que φ_a est un automorphisme du disque.*
2. *On a $\varphi_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ et $\varphi_a(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$.*
3. *L'application φ_a appartient à $H^2(\mathbb{D})$.*

Démonstration. C'est clair si $a = 0$. Soit $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$.

Pour tout nombre complexe z différent de $1/\overline{a}$, on a

$$\begin{aligned} |\varphi_a(z)| < 1 &\iff |z-a|^2 < |1-\overline{a}z|^2 \\ &\iff |z|^2 - 2\,\mathfrak{Re}(\overline{a}z) + |a|^2 < 1 - 2\,\mathfrak{Re}(\overline{a}z) + |\overline{a}z|^2 \\ &\iff |z|^2(1-|a|^2) < 1 - |a|^2 \\ &\iff |z| < 1 \end{aligned}$$

en divisant par $1-|a|^2 > 0$. Par ailleurs, on vérifie aisément que $\varphi_a \circ \varphi_{-a} = \varphi_{-a} \circ \varphi_a = \mathrm{Id}_{\mathbb{D}}$. Ceci démontre les deux premiers points (pour $\varphi_a(\mathbb{T})$, il suffit de remplacer les inégalités ci-dessus par des égalités). En particulier, φ_a est bornée sur $\mathbb{D}$ (et elle est développable en série entière sur $\mathbb{D}$) donc $\varphi_a \in H^2(\mathbb{D})$ (d'après la Proposition 5). ***cqfd***

Ces résultats élémentaires d'analyse complexe vont maintenant nous permettre d'aborder l'étude de la continuité des opérateurs de composition sur $H^2(\mathbb{D})$.

4. Le théorème

Dans cette dernière partie, nous démontrons la continuité des opérateurs de composition. Dans les Théorèmes 3 et 4, nous commencerons par estimer la norme de $C_\varphi f$ où f est une application polynomiale puis nous invoquerons un argument de densité. Celui-ci utilise la Proposition 8 ci-dessous.

4.1. *Un résultat préliminaire*

Le résultat de prolongement est le suivant.

Proposition 8. — *Soient $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, D un sous-espace vectoriel dense de X et $T : D \longrightarrow X$ un opérateur linéaire borné. Alors T se prolonge de manière unique en un opérateur linéaire borné sur X et la norme du prolongement coïncide avec la norme de l'opérateur T.*

Démonstration.

⋆ Commençons par démontrer l'existence d'un tel prolongement. Soit $x \in X$. Comme D est dense dans X, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D qui converge vers x dans $(X, \|\cdot\|)$. Puisque T est un opérateur linéaire borné, on a :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \qquad \|Tx_m - Tx_n\| = \|T(x_m - x_n)\| \leqslant \|T\|\,\|x_m - x_n\|.$$

On en déduit que la suite $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace complet $(X, \|\cdot\|)$; elle est donc convergente dans cet espace. Si de plus $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite d'éléments de D qui converge vers x dans $(X, \|\cdot\|)$, alors la suite $(Ty_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et, comme précédemment,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|Tx_n - Ty_n\| \leqslant \|T\|\,\|x_n - y_n\|.$$

Ainsi les suites $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Ty_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de même limite (la limite ne dépend donc pas de la suite de D qui converge vers x). Notons Sx cette limite. Nous définissons alors l'application

$$S : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ x & \longmapsto & \lim\limits_{\substack{y\to x \\ y\in D}} Ty. \end{array} \right.$$

Il est clair que S est bien un prolongement de l'opérateur T sur l'espace de Banach X (si $x \in D$, il suffit de choisir la suite constante égale à x qui est bien une suite d'éléments de D qui converge vers x). Il s'agit maintenant de démontrer que S est un opérateur linéaire borné sur X. Le caractère linéaire de S est évident. De plus, pour tout $x \in X$ et toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D qui converge vers x, on a par continuité de la norme et de l'opérateur T sur D :

$$\|Sx\| = \lim_{\substack{y\to x \\ y\in D}} \|Ty\| \leqslant \lim_{\substack{y\to x \\ y\in D}} \big(\|T\|\,\|y\|\big) \quad \text{d'où} \quad \|Sx\| \leqslant \|T\|\,\|x\|.$$

L'opérateur S est donc borné sur X et $\|S\| \leqslant \|T\|$. Par ailleurs, comme S prolonge T, on a l'inclusion

$$\big\{\|Tx\| \,\big|\, x \in D \text{ et } \|x\| = 1\big\} \subset \big\{\|Sx\| \,\big|\, x \in X \text{ et } \|x\| = 1\big\}.$$

donc nous avons aussi l'inégalité $\|S\| \geqslant \|T\|$, d'où l'égalité.

⋆ Montrons maintenant qu'il y a unicité d'un tel prolongement. Supposons que $U \in \mathcal{B}(X)$ soit un prolongement de T. Si $x \in X$ et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de D qui converge vers x, alors on a par continuité de U :

$$Ux = \lim_{n\to+\infty} Ux_n = \lim_{n\to+\infty} Tx_n$$

car U prolonge T et donc $Ux = Sx$ par définition de S, ce qui prouve que $U = S$ d'où l'unicité.

Ceci achève la démonstration de la Proposition 8. ***cqfd***

Remarque. Plus généralement, si E et F sont des espaces métriques (où F est complet) et si $f : D \longrightarrow F$ est une application uniformément continue sur une partie dense D de E, alors on peut montrer de la même façon que f se prolonge de manière unique en une application uniformément continue sur E (nous renvoyons par exemple le lecteur à [3, Exercice 4 page 23]).

4.2. *Plan et démonstration du théorème*

Soit φ une application développable en série entière en 0 sur $\mathbb{D}$ telle que $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Nous démontrons dans cette partie que l'opérateur

$$C_\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} H^2(\mathbb{D}) & \longrightarrow & H^2(\mathbb{D}) \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array} \right.$$

est bien défini (c'est-à-dire que pour tout $f \in H^2(\mathbb{D})$, on a bien $C_\varphi f \in H^2(\mathbb{D})$) et qu'il est borné. La démonstration s'articule essentiellement en les trois points suivants :

1. dans un premier temps, nous traitons le cas particulier où φ fixe l'origine, c'est-à-dire est tel que $\varphi(0) = 0$ (Théorème 3) ;
2. ensuite, nous nous plaçons dans le cas où φ est un automorphisme du disque (Théorème 4) ;
3. dans le cas général (c'est-à-dire $\varphi(0) \neq 0$ a priori), nous nous ramenons au cas où le symbole fixe l'origine en le composant par un automorphisme du disque bien choisi.

Commençons donc par traiter le cas où le symbole φ fixe l'origine.

Théorème 3 (théorème de subordination de Littlewood). — *Soit φ une application développable en série entière en 0 sur $\mathbb{D}$ telle que $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ et $\varphi(0) = 0$. L'application C_φ est un opérateur linéaire borné sur $H^2(\mathbb{D})$ et*

$$\|C_\varphi\| = 1.$$

Démonstration.

⋆ Commençons par remarquer que, d'après la Proposition 6, pour tout $f \in H^2(\mathbb{D})$, la fonction $f \circ \varphi$ est développable en série entière en 0 sur $\mathbb{D}$. De plus, il est clair que C_φ est une application linéaire.

⋆ **Étape 1.** Rappelons que $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des applications polynomiales de $H^2(\mathbb{D})$. Nous allons d'abord montrer que C_φ est un opérateur linéaire borné de $\mathcal{P}$ dans $H^2(\mathbb{D})$ et nous calculerons la norme de cette restriction. Soit f une application polynomiale. Par la Proposition 6, la fonction $f \circ \varphi$ est développable en série entière en 0 sur $\mathbb{D}$ et est de plus bornée sur $\mathbb{D}$ (car f l'est). D'après la Proposition 5, la fonction $f \circ \varphi$ appartient donc à $H^2(\mathbb{D})$. Il existe un entier naturel N et des nombres complexes $a_0, \dots, a_N$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{D}, \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$$

et alors

$$f(\varphi(z)) = \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi(z)^n = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi(z)^n.$$

Sachant que $\varphi(0) = 0$, le coefficient constant de la série entière $\displaystyle\sum_{1 \leqslant n \leqslant N} a_n \varphi(z)^n$ est nul. Ainsi, par orthogonalité (Proposition 2), on a

$$\|f \circ \varphi\|_2^2 = |a_0|^2 + \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi^n \Big\|_2^2.$$

Or

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi^n \Big\|_2 = \Big\| \varphi \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} \varphi^n \Big\|_2 \leqslant \|\varphi\|_\infty \Big\| \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} \varphi^n \Big\|_2,$$

où la dernière inégalité provient de la bornitude de l'opérateur de multiplication M_φ sur $H^2(\mathbb{D})$ (Théorème 1). Or $\|\varphi\|_\infty \leqslant 1$, donc

$$\|f \circ \varphi\|_2^2 \leqslant |a_0|^2 + \Big\| \sum_{n=0}^{N-1} a_{n+1} \varphi^n \Big\|_2^2.$$

En réitérant le procédé, on obtient alors

$$\|f \circ \varphi\|_2^2 \leqslant \sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 = \|f\|_2^2.$$

Nous venons donc de montrer que, pour toute application polynomiale f, nous avons $\|C_\varphi f\|_2 \leqslant \|f\|_2$. Si f est la fonction constante égale à 1 (qui est bien une application polynomiale), on a l'égalité $\|C_\varphi f\|_2 = \|f\|_2$. Donc l'opérateur

$$C_\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & H^2(\mathbb{D}) \\ f & \longmapsto & f \circ \varphi \end{array} \right.$$

est borné et sa norme vaut 1.

⋆ **Étape 2.** D'après la Proposition 8 (par densité de $\mathcal{P}$ dans $H^2(\mathbb{D})$), l'application $C_\varphi : \mathcal{P} \longrightarrow H^2(\mathbb{D})$ se prolonge de manière unique en un opérateur linéaire borné $S \in \mathcal{B}(H^2(\mathbb{D}))$. Il s'agit maintenant de montrer que S coïncide bien avec l'opérateur de composition C_φ sur $H^2(\mathbb{D})$. Soit $f \in H^2(\mathbb{D})$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes qui converge vers f dans $H^2(\mathbb{D})$. Par continuité de l'application d'évaluation (Proposition 3), on a pour tout entier naturel n et pour tout $z \in \mathbb{D}$,

$$|Sf(z) - Sf_n(z)| \leqslant \frac{\|Sf - Sf_n\|_2}{\sqrt{1-|z|^2}} \leqslant \frac{\|S\|\,\|f - f_n\|_2}{\sqrt{1-|z|^2}}$$

c'est-à-dire, puisque S coïncide avec C_φ sur l'ensemble $\mathcal{P}$ des polynômes,

$$|Sf(z) - f_n(\varphi(z))| \leqslant \frac{\|S\|\,\|f - f_n\|_2}{\sqrt{1-|z|^2}}. \tag{7}$$

D'après le Corollaire 1, on sait que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur $\mathbb{D}$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans (7), on trouve donc que $Sf(z) = f(\varphi(z))$ pour tout $z \in \mathbb{D}$ et donc $S = C_\varphi$. D'après la Proposition 8, nous savons que la norme de S est égale à 1. Finalement, C_φ est bien un opérateur linéaire borné sur $H^2(\mathbb{D})$ et $\|C_\varphi\| = 1$.

Ceci achève la démonstration du Théorème 3. ***cqfd***

Lorsque le symbole φ est un automorphisme du disque, et plus généralement lorsque le rayon de convergence de φ est strictement plus grand que 1 et tel que $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ et $\varphi(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$, le calcul de la norme de $C_\varphi f$, où f est un polynôme, est explicite. Ainsi, il est possible de trouver la norme de C_φ pour un tel symbole. Le résultat est le suivant.

Théorème 4. — *Soient $r > 1$ et φ une application développable en série entière en 0 sur $D(0,r)$ telle que $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$ et $\varphi(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$. Alors l'opérateur C_φ est borné sur $H^2(\mathbb{D})$ et on a*

$$\|C_\varphi\| = \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}.$$

Démonstration.

⋆ **Étape 1.** Nous allons montrer que C_φ est un opérateur linéaire borné de $\mathcal{P}$ dans $H^2(\mathbb{D})$ et nous donnerons une majoration de sa norme. Soit f une application polynomiale sur $\mathbb{D}$. Il existe un entier naturel N et des nombres complexes $a_0, \ldots, a_N$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{D}, \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n.$$

Alors, par croissance de la fonction $M(f,\cdot)$ définie en (2) (voir aussi la remarque qui succède à la Proposition 4), on a

$$\|C_\varphi f\|_2^2 = \sup_{0\leqslant r<1} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(\varphi(re^{i\theta}))\right|^2 \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(\varphi(e^{i\theta}))\right|^2 \mathrm{d}\theta.$$

Or, pour tout $\theta \in [0,2\pi]$, on a

$$\begin{aligned}\left|f(\varphi(e^{i\theta}))\right|^2 &= \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N} a_n\overline{a_m}\varphi(e^{i\theta})^n\overline{\varphi(e^{i\theta})}^m \\ &= \sum_{0\leqslant n\leqslant m\leqslant N} a_n\overline{a_m}\left|\varphi(e^{i\theta})\right|^{2n}\overline{\varphi(e^{i\theta})}^{m-n} \\ &\quad + \sum_{0\leqslant m\leqslant n\leqslant N} a_n\overline{a_m}\varphi(e^{i\theta})^{n-m}\left|\varphi(e^{i\theta})\right|^{2m} - \sum_{n=0}^{N}|a_n|^2|\varphi(e^{i\theta})|^{2n}.\end{aligned}$$

Or $\varphi(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$ donc pour tout $\theta \in [0,2\pi]$, on a $\left|\varphi(e^{i\theta})\right| = 1$. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned}\left|f(\varphi(e^{i\theta}))\right|^2 &= \sum_{0\leqslant n\leqslant m\leqslant N} a_n\overline{a_m}\overline{\varphi(e^{i\theta})}^{m-n} + \sum_{0\leqslant m\leqslant n\leqslant N} a_n\overline{a_m}\varphi(e^{i\theta})^{n-m} - \sum_{n=0}^{N}|a_n|^2 \\ &= 2\,\mathfrak{Re}\Big(\sum_{0\leqslant n\leqslant m\leqslant N} a_m\overline{a_n}\varphi(e^{i\theta})^{m-n}\Big) - \sum_{n=0}^{N}|a_n|^2.\end{aligned}$$

Par linéarité, il vient

$$\|C_\varphi f\|_2^2 = 2\,\mathfrak{Re}\Big(\sum_{0\leqslant n\leqslant m\leqslant N} a_m\overline{a_n}\int_0^{2\pi}\varphi(e^{i\theta})^{m-n}\,\frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi}\Big) - \|f\|_2^2.$$

Or $r > 1$ donc, d'après l'égalité de la moyenne (Lemme 2), on a pour tout couple (m,n) d'entiers naturels tels que $n \leqslant m$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(e^{i\theta})^{m-n}\,\mathrm{d}\theta = \varphi(0)^{m-n} = \lambda^{m-n}$$

en posant $\lambda := \varphi(0)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\|C_\varphi f\|_2^2 &= 2\ \mathfrak{Re}\Big(\sum_{0\leqslant n\leqslant m\leqslant N} a_m\overline{a_n}\lambda^{m-n}\Big) - \|f\|_2^2 \\ &\leqslant 2\Big|\sum_{0\leqslant n\leqslant m\leqslant N} a_m\overline{a_n}\lambda^{m-n}\Big| - \|f\|_2^2 \\ &\leqslant 2\sum_{0\leqslant n\leqslant m\leqslant N}|a_n||a_m|\,|\lambda|^{m-n} - \|f\|_2^2. \qquad (8)\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant d'estimer la dernière somme. On a

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant n\leqslant m\leqslant N} |a_n||a_m|\,|\lambda|^{m-n} &= \sum_{n=0}^{N} |a_n| \sum_{m=n}^{N} |a_m|\,|\lambda|^{m-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N} |a_n| \sum_{\ell=0}^{N-n} |a_{\ell+n}|\,|\lambda|^{\ell} \\ &= \sum_{\ell=0}^{N} |\lambda|^{\ell} \sum_{n=0}^{N-\ell} |a_n|\,|a_{\ell+n}|.\end{aligned}$$

Or pour tout $\ell \in \{0,\dots,N\}$, on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{n=0}^{N-\ell} |a_n|\,|a_{\ell+n}| \leqslant \Big(\sum_{n=0}^{N-\ell} |a_n|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{n=0}^{N-\ell} |a_{\ell+n}|^2\Big)^{1/2} \leqslant \|f\|_2^2.$$

Finalement,

$$\sum_{0\leqslant n\leqslant m\leqslant N} |a_n||a_m|\,|\lambda|^{m-n} \leqslant \Big(\sum_{\ell=0}^{N} |\lambda|^{\ell}\Big)\|f\|_2^2 \leqslant \Big(\sum_{\ell=0}^{+\infty} |\lambda|^{\ell}\Big)\|f\|_2^2,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{0\leqslant n\leqslant m\leqslant N} |a_n||a_m|\,|\lambda|^{m-n} \leqslant \frac{\|f\|_2^2}{1-|\lambda|}. \tag{9}$$

Les majorations (8) et (9) fournissent :

$$\|C_\varphi f\|_2^2 \leqslant \frac{1+|\lambda|}{1-|\lambda|}\,\|f\|_2^2 \qquad \text{et donc} \qquad \|C_\varphi f\|_2 \leqslant \sqrt{\frac{1+|\lambda|}{1-|\lambda|}}\,\|f\|_2.$$

Ainsi, la restriction de notre opérateur C_φ à l'espace vectoriel $\mathcal{P}$ est borné de $\mathcal{P}$ dans $H^2(\mathbb{D})$ et sa norme est inférieure ou égale à $\sqrt{\dfrac{1+|\lambda|}{1-|\lambda|}}$.

⋆ **Étape 2.** Nous utilisons maintenant l'argument de densité invoqué dans l'étape 2 du Théorème 3. Nous trouvons que $C_\varphi \in \mathcal{B}(H^2(\mathbb{D}))$ et que $\|C_\varphi\| \leqslant \sqrt{\dfrac{1+|\lambda|}{1-|\lambda|}}$.

⋆ **Étape 3.** Cherchons enfin une minoration de la norme de C_φ. Nous notons toujours $\lambda = \varphi(0)$. Pour tout entier naturel N et tout $r \in \left]0, \dfrac{1}{|\lambda|}\right[$ différent de 1, on définit l'application polynomiale $f_{N,r}$ par

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f_{N,r}(z) = \sum_{n=0}^{N} (\overline{\lambda} r)^n z^n.$$

Remarquons que

$$\|f_{N,r}\|_2^2 = \sum_{n=0}^{N} |\lambda r|^{2n} = \frac{1-|\lambda r|^{2(N+1)}}{1-|\lambda r|^2}.$$

D'après la première partie de la preuve, on a

$$\begin{aligned}\|C_\varphi(f_{N,r})\|_2^2 &= 2\,\mathfrak{Re}\Big(\sum_{0\leqslant n\leqslant m\leqslant N} (\lambda r)^n(\overline{\lambda} r)^m \lambda^{m-n}\Big) - \frac{1-|\lambda r|^{2(N+1)}}{1-|\lambda r|^2}\\ &= 2\Big(\sum_{0\leqslant n\leqslant m\leqslant N} r^{n+m}|\lambda|^{2m}\Big) - \frac{1-|\lambda r|^{2(N+1)}}{1-|\lambda r|^2}\\ &= 2\sum_{m=0}^{N} r^m|\lambda|^{2m}\sum_{n=0}^{m} r^n - \frac{1-|\lambda r|^{2(N+1)}}{1-|\lambda r|^2}.\end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} r^n = \frac{1-r^{m+1}}{1-r}$, on obtient en utilisant la linéarité de la somme sur l'entier m :

$$\begin{aligned}\|C_\varphi(f_{N,r})\|_2^2 &= \frac{2}{1-r}\Big(\sum_{m=0}^{N}(r|\lambda|^2)^m - r\sum_{m=0}^{N}(|\lambda r|^2)^m\Big) - \frac{1-|\lambda r|^{2(N+1)}}{1-|\lambda r|^2}\\ &= \frac{2}{1-r}\left(\frac{1-(r|\lambda|^2)^{N+1}}{1-r|\lambda|^2} - r\frac{1-(|\lambda r|^2)^{N+1}}{1-r^2|\lambda|^2}\right) - \frac{1-|\lambda r|^{2(N+1)}}{1-|\lambda r|^2}.\end{aligned}$$

Ainsi on a

$$\frac{\|C_\varphi(f_{N,r})\|_2^2}{\|f_{N,r}\|_2^2} = \frac{2}{1-r}\left(\frac{1-(r|\lambda|^2)^{N+1}}{1-r|\lambda|^2}\times\frac{1-|\lambda r|^2}{1-|\lambda r|^{2(N+1)}} - r\right) - 1.$$

Par définition de la norme de C_φ nous obtenons alors, pour tout entier naturel N et tout $r\in\left]0,\dfrac{1}{|\lambda|}\right[$,

$$\|C_\varphi\|^2 \geqslant \frac{2}{1-r}\left(\frac{1-(r|\lambda|^2)^{N+1}}{1-r|\lambda|^2}\times\frac{1-|\lambda r|^2}{1-|\lambda r|^{2(N+1)}} - r\right) - 1.$$

Comme $|\lambda r|<1$ et $|r\lambda^2|<1$, on a en faisant tendre N vers $+\infty$:

$$\|C_\varphi\|^2 \geqslant \frac{2}{1-r}\left(\frac{1-|\lambda r|^2}{1-r|\lambda|^2} - r\right) - 1,$$

c'est-à-dire, après calcul,

$$\|C_\varphi\|^2 \geqslant \frac{1+r|\lambda|^2}{1-r|\lambda|^2}.$$

En faisant tendre r vers $\dfrac{1}{|\lambda|}$, il vient

$$\|C_\varphi\|^2 \geqslant \frac{1+|\lambda|}{1-|\lambda|},$$

ce qui nous donne la minoration souhaitée.

Comme $\lambda = \varphi(0)$, nous pouvons enfin conclure que

$$\|C_\varphi\| = \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}$$

ce qui achève la démonstration du Théorème 4. ***cqfd***

Les Théorèmes 3 et 4 vont nous permettre de finalement démontrer le résultat principal de l'article.

Théorème 2. — *Soit φ une application développable en série entière en 0 sur $\mathbb{D}$ telle que $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Alors l'opérateur de composition C_φ est borné sur $H^2(\mathbb{D})$. De plus,*

$$\|C_\varphi\| \leqslant \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}.$$

Démonstration. Posons $a = \varphi(0) \in \mathbb{D}$ et notons ψ l'automorphisme du disque φ_a. Nous savons que $\psi^{-1} = \phi_{-a}$ (Proposition 7), donc nous avons l'égalité $\varphi = \psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi$. Comme $\psi(a) = 0$, l'application $\psi \circ \varphi$ fixe l'origine. De plus, $\psi \circ \varphi$ est développable en série entière en 0 sur $\mathbb{D}$ et $(\psi \circ \varphi)(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. D'après le Théorème 3, on a donc $\|C_{\psi\circ\varphi}\| = 1$. D'après le Théorème 4, nous savons que l'opérateur $C_{\psi^{-1}}$ est borné sur $H^2(\mathbb{D})$ et que sa norme vaut $\sqrt{\dfrac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}$ car $\psi^{-1}(0) = \varphi(0)$. Comme $C_\varphi = C_{\psi\circ\varphi} \circ C_{\psi^{-1}}$, l'opérateur C_φ est borné sur $H^2(\mathbb{D})$ (par composition) et

$$\|C_\varphi\| \leqslant \|C_{\psi^{-1}}\| \times \|C_{\psi\circ\varphi}\| = \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}$$

ce qu'il fallait établir. ***cqfd***

Nous terminons cette note par des questions ouvertes.

Le Théorème 4 montre que pour une classe de symboles φ, nous connaissons exactement la norme de C_φ :

$$\|C_\varphi\| = \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}.$$

En toute généralité, la norme d'un opérateur de composition n'est pas nécessairement égale à cette quantité. Considérons par exemple le cas très particulier où φ est une fonction constante, disons égale à $a \in \mathbb{D}$. Dans ce cas, pour tout $f \in H^2(\mathbb{D})$, on a $C_\varphi(f) = f(a)$. Si $a \neq 0$, on a alors

$$\|C_\varphi\| = \|\delta_a\| = \frac{1}{\sqrt{1-|a|^2}} < \sqrt{\frac{1+|a|}{1-|a|}}$$

La question de déterminer la norme d'un opérateur de composition est toujours ouverte même si de nombreux résultats existent. Citons par exemple le résultat suivant démontré par C.C. Cowen.

Théorème 5 (Cowen, [2]). — *Soit $(s,t) \in \mathbb{C}^2$ tel que $|s|+|t| \leqslant 1$ et soit φ le symbole défini par*

$$\forall z \in \mathbb{D}, \qquad \varphi(z) = sz + t$$

Alors l'opérateur de composition C_φ est borné sur $H^2(\mathbb{D})$ et on a l'égalité suivante

$$\|C_\varphi\| = \sqrt{\frac{2}{1+|s|^2-|t|^2+\sqrt{(1-|s|^2+|t|^2)^2-4|t|^2}}}$$

Dans le volume 132-1 de la RMS, la question a été posée de retrouver *simplement* la norme de C_φ annoncée dans ce théorème dans le cas particulier où $|s|+|t|=1$.

Références

[1] E. AMAR, E. MATHERON, *Analyse complexe,* Cassini

[2] C.C. COWEN, *Linear Fractional Composition Operator on H^2,* Journal of Integral Equations and Operator Theory 11 (1988)

[3] X. GOURDON, *Les maths en tête (Analyse), deuxième édition,* Ellipses

[4] H. QUEFFÉLEC, *Norms of composition operators with affine symbols,* Journal of Analysis (20) 2012, 47-58

[5] J.H. SHAPIRO, *Composition operators and classical function theory,* Springer-Verlag.