

DÉTERMINANTS

1 Groupes symétriques

Exercice 1 1. On pose :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Écrire les permutations $\sigma\theta$ et σ^{-1} comme des produits de cycles à supports disjoints.

2. Écrire la permutation :

$$\tau = (1\ 2)(2\ 4\ 6\ 5)(1\ 3\ 7)(2\ 5\ 4)(3\ 5\ 6\ 1)(2\ 5)(1\ 4\ 6)$$

comme un produit de cycles à supports disjoints.

3. Calculer la signature des permutations :

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 2 & 1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

et $\psi = (1\ 3\ 4)(2\ 4\ 3\ 1)(2\ 3)$.

Exercice 2 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour tout $\sigma \in S_n$, simplifier $\sigma(a_1\ a_2\ \dots\ a_p)\sigma^{-1}$, où $a_1, \dots, a_p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont deux à deux distincts et $p \geq 2$.
- Montrer que toute permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est un produit de transpositions de la forme $(1\ i)$, où $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

2 Petits déterminants

Exercice 3 Soient $a, x \in \mathbb{K}$. Calculer les deux déterminants :

$$1. \Delta_1 = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \quad 2. \Delta_2 = \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}$$

Exercice 4 Soit ω une racine cubique de l'unité. Montrer avec un minimum de calculs que :

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega^2 & \omega \\ \omega & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 5 Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$. Calculer les déterminants suivants (on factorisera les expressions obtenues) :

$$1. \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} \quad 2. \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$3. \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix} \quad 4. \Delta_4 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

$$5. \Delta_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad 6. \Delta_6 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \end{vmatrix}$$

$$7. \Delta_7 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

3 Gros déterminants

Exercice 6 Calculer le déterminant de la matrice $n \times n$ suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} (0) & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & (0) \end{pmatrix}$$

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$D_n = \begin{vmatrix} n & n-1 & \dots & 1 \\ 1 & n & \dots & 2 \\ \vdots & & & \vdots \\ n-1 & \dots & 1 & n \end{vmatrix}$$

Exercice 8 Pour tout entier naturel n non nul, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n k$. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le déterminant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} S_1 & \dots & \dots & \dots & S_1 \\ \vdots & S_2 & \dots & \dots & S_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & S_{n-1} & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & \dots & S_{n-1} & S_n \end{vmatrix}$$

Exercice 9 Soient a, b et c trois nombres complexes. On considère la matrice carrée d'ordre n suivante :

$$A = \begin{pmatrix} c & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & c \end{pmatrix}$$

et on note J la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. On suppose que $a \neq b$.

(a) En effectuant des opérations élémentaires sur les colonnes, montrer que :

$$x \longmapsto \det(A + xJ)$$

est une fonction affine.

(b) En donnant à x deux valeurs bien choisies, calculer $\det(A+xJ)$ pour tout $x \in \mathbb{C}$. Que vaut $\det(A)$?

2. Que vaut $\det(A)$ si $a = b$?

Exercice 10 Soient $a, x \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant d'ordre n suivant :

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & x \end{vmatrix}$$

Exercice 11 Calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, le déterminant de la matrice :

$$M(n, x) = \begin{pmatrix} x & 2 & \dots & n & 1 \\ 1 & x & & \vdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & n & \vdots \\ \vdots & \vdots & & x & 1 \\ 1 & 2 & \dots & n & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 12 Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n la matrice carrée de taille n dont le coefficient en position $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ vaut :

$$\begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et on pose $D_n = \det(A_n)$.

1. Expliciter les matrices A_3, A_4 et A_5 .
2. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par les déterminants D_n .
3. En déduire la valeur de D_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4 Déterminants d'endomorphismes

Exercice 13 Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}_2[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{K}_2[X], \quad f(P) = P + P'$$

Calculer $\det(f)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 14 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E . Calculer le déterminant de la projection sur F parallèlement à G et de la symétrie par rapport à F parallèlement à G en fonction des dimensions de F et G .

Exercice 15 Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit p un projecteur de E . Que vaut $\det(p)$?
2. Soit s une symétrie de E . Que vaut $\det(s)$?
3. Application : on considère l'endomorphisme t de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui à une matrice associe sa transposée. Que vaut $\det(t)$?

Exercice 16 Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère :

$$m_A : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{cases}$$

1. Justifier que $m_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.
2. Montrer que $\det(m_A) = \det(A)^2$.
3. Généraliser en dimension quelconque.

Exercice 17 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\sigma \in S_n$, on définit l'application :

$$u_\sigma : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $\sigma \in S_n$, on a $u_\sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
2. Soit $\sigma, \tau \in S_n$. Que vaut $u_\sigma \circ u_\tau$?
3. En déduire que pour tout $\sigma \in S_n$, u_σ est un automorphisme de \mathbb{R}^n et que :

$$U : \begin{cases} S_n & \longrightarrow & \text{GL}(\mathbb{R}^n) \\ \sigma & \longmapsto & u_{\sigma^{-1}} \end{cases}$$

est un morphisme de groupes.

4. Calculer $\det(u_\sigma)$ pour tout $\sigma \in S_n$.

Exercice 18 Soit f l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le polynôme \tilde{P} tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tilde{P}(x) = \int_x^{x+1} P(t) dt$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f induit un endomorphisme f_n de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer $\det(f_n)$ pour tout entier naturel n .

Exercice 19 Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie.

1. On suppose qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 + \text{Id}_E = 0$. Montrer que la dimension de E est paire.
2. On suppose qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 + u + \text{Id}_E = 0$. Montrer que $\dim(E)$ est paire.

5 Divers

Exercice 20 Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\text{Com}(\text{Com}(A)) = \det(A)^{n-2} A$$

Exercice 21 Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. On pose :

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

1. Calculer AA^T .
2. On suppose que $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Montrer que $|\det(A)| \leq 1$.

Exercice 22 Soit u un endomorphisme d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne une base \mathcal{B} de E . Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on pose :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \dots, x_n)$$

Montrer que $f = \text{tr}(u) \det_{\mathcal{B}}$.