

# DÉRIVABILITÉ

(d'autres corrigés)

## Exercice 1

1. Toute fonction polynomiale est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc la fonction  $f$  est dérivable sur les intervalles  $]-\infty, 1]$  et  $]1, +\infty[$ . Il reste à étudier la dérivabilité en 0. On a  $f(1) = (1-1)^2 = 0$  donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0$$

et :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)^3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1)^2 = 0$$

Ainsi, la fonction  $f$  est dérivable à gauche et à droite en 0 et  $f'_g(0) = 0 = f'_d(0)$ . Par conséquent,  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$ . Finalement :

la fonction  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

2. Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Toute fonction polynomiale est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc la fonction  $g$  est dérivable sur les intervalles  $]-\infty, 1]$  et  $]1, +\infty[$ . Il reste à étudier la dérivabilité de  $g$  en 1, en fonction des paramètres  $a$  et  $b$ .

- ★ Pour que  $f$  soit dérivable en 1, il faut qu'elle y soit continue. Or  $g(1) = 2$  et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} a + b + 1$ . Ainsi, si  $a + b \neq 1$ , alors  $g$  n'est pas dérivable en 1 (car elle n'y est pas continue).
- ★ On suppose que  $a + b = 1$ . La fonction  $g$  est continue en 1. Étudions la dérivabilité de  $g$  en 1. On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+2) \\ &= 3 \end{aligned}$$

donc  $g$  est dérivable à gauche en 1 et  $g'_g(1) = 3$  (quelles que soient les valeurs

de  $a$  et  $b$ ). De plus :

$$\begin{aligned} \forall x \in ]1, +\infty[, \quad \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} &= \frac{ax^3 + bx^2 - 1}{x - 1} \\ &= \frac{ax^3 + (1-a)x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \frac{(x-1)(ax^2 + x + 1)}{x - 1} \\ &= ax^2 + x + 1 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax^2 + x + 1) = a + 2$$

La fonction  $g$  est donc dérivable à droite en 1 et  $g'_d(1) = a + 2$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} g \text{ est dérivable en } 1 &\iff g'_g(1) = g'_d(1) \iff a + 2 = 3 \\ &\iff a = -1 \end{aligned}$$

Finalement, la fonction  $g$  est dérivable en 1 si et seulement si  $(a, b) = (-1, 2)$ .

la fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $(a, b) = (-1, 2)$

3. La fonction valeur absolue est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$ , la fonction  $x \mapsto x^2 - 1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et la fonction  $x \mapsto |x| + |x^2 - 1|$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ . Par composition et quotient de fonctions dérivables, on en déduit que  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ . Il reste à étudier la dérivabilité de  $h$  en  $-1$ , en 0 et en 1.

- ★ On a  $h(0) = 0$  et :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(|x| + |x^2 - 1|)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x| + |x^2 - 1|} = 1$$

La fonction  $h$  est donc dérivable en 0 et  $h'(0) = 0$ .

- ★ On a  $h(1) = 1$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ , on a :

$$\frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \frac{\frac{x}{|x| + |x^2 - 1|} - 1}{x - 1} = \frac{x - |x| - |x^2 - 1|}{(x - 1)(|x| + |x^2 - 1|)}$$

Si  $x \in ]1, +\infty[$ , alors  $x^2 - 1 > 0$  donc :

$$\frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \frac{1 - x^2}{(x - 1)(x + x^2 - 1)} = -\frac{x + 1}{x^2 + x - 1}$$

donc  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = -2$ . De plus, pour tout  $x \in [0, 1[$ , on a  $x^2 - 1 \leq 0$   
donc :

$$\frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{(x - 1)(-x^2 + x + 1)} = \frac{x + 1}{-x^2 + x + 1}$$

donc  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = 2$ . La fonction  $h$  est donc dérivable à gauche et à droite en 1 et  $h'_g(1) = 2$  et  $h'_d(1) = -2$ . Les nombres dérivées à gauche et à droite étant différents, la fonction  $h$  n'est pas dérivable en 0.

★ On montre de la même manière que  $h$  n'est pas dérivable en 1.

Finalement :

la fonction  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

## Exercice 2

1. Par hypothèse, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = f(x)$$

Comme  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , on obtient en dérivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f'(-x) = f'(x) \quad i.e. \quad f'(-x) = -f'(x)$$

Autrement dit :

si  $f$  est paire sur  $\mathbb{R}$ , alors  $f'$  est impaire sur  $\mathbb{R}$

2. ★ Supposons que  $f$  est impaire sur  $\mathbb{R}$ . Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = -f(x)$$

En dérivant, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -f'(-x) = -f'(x) \quad i.e. \quad f'(-x) = f'(x)$$

Ainsi :

si  $f$  est impaire sur  $\mathbb{R}$ , alors  $f'$  est paire sur  $\mathbb{R}$

★ Supposons maintenant que  $f$  est périodique sur  $\mathbb{R}$ . Il existe alors  $T \in \mathbb{R}_+^*$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + T) = f(x)$$

En dérivant, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x + T) = f'(x)$$

Donc :

si  $f$  est périodique sur  $\mathbb{R}$ , alors  $f'$  est périodique, de même période que  $f$

**Exercice 3** Comme  $f$  est dérivable en  $a$ , on a  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(a)$ . De même, puisque  $h^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ , on a par composition des limites :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h^2) - f(a)}{h^2} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(a+k) - f(a)}{k} = f'(a)$$

Pour tout  $h \in \mathbb{R}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a+h^2)}{h} &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{f(a+h^2) - f(a)}{h} \\ &= \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - h \times \frac{f(a+h^2) - f(a)}{h^2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a+h^2)}{h} = f'(a) - 0 \times f'(a) = f'(a)$$

**Exercice 4** Soit  $f \in \mathcal{D}([a, b], \mathbb{R})$  telle que  $f(a) = f(b) = 0$ ,  $f'(a) > 0$  et  $f'(b) < 0$ .

**Remarque :** commencer par faire un dessin pour se convaincre que la fonction  $f$  s'annule effectivement dans  $]a, b[$ .

★ Montrons qu'il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) > 0$ . On raisonne par l'absurde : supposons que pour tout  $x \in ]a, b[$ , on a  $f(x) \leq 0$ . Par définition du nombre dérivé :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{x - a} \quad (\text{car } f(a) = 0)$$

Or :

$$\forall x \in ]a, b[, \quad \frac{f(x)}{x - a} \leq 0 \quad (\text{car } f(x) \leq 0 \text{ et } x - a > 0)$$

En passant à la limite, on obtient  $f'(a) \leq 0$ . Ceci est absurde car  $f'(a) > 0$  par hypothèse.

★ De la même manière, il existe  $d \in ]a, b[$  tel que  $f(d) < 0$ .

La fonction  $f$  est continue sur  $[\min(c, d), \max(c, d)]$  et  $f(c)f(d) < 0$  donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $x_0 \in [\min(c, d), \max(c, d)] \subset ]a, b[$  tel que  $f(x_0) = 0$ . Ainsi :

la fonction  $f$  s'annule sur  $]a, b[$

## Exercice 5

1. (a) En utilisant le raisonnement habituel (notamment avec la méthode de la variation de la constante pour trouver une solution particulière), on obtient que, sur chacun des deux intervalles, l'ensemble des solutions est :

$$\left\{ x \mapsto \frac{C}{1-x} + \frac{x^2}{1-x} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$$

- (b) Déterminons les solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  en raisonnant par analyse-synthèse.

★ **Analyse** : soit  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  une solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ . Alors  $f$  est solution de  $(E)$  sur chacun des intervalles  $]-\infty, 1[$  et  $]1, +\infty[$  donc il existe  $C, D \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{C}{1-x} + \frac{x^2}{1-x} & \text{si } x < 1 \\ \frac{D}{1-x} + \frac{x^2}{1-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Par ailleurs, en remplaçant  $x$  par 1 dans  $(E)$ , on obtient  $f(1) = -2$ . La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc elle l'est en particulier au point 1. Si  $C \neq -1$ , alors :

$$f(x) = \frac{x^2 + C}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \begin{cases} +\infty & \text{si } C > -1 \\ -\infty & \text{si } C < -1 \end{cases}$$

Pour que  $f$  soit continue en 1, il faut donc que  $C = D = -1$ . Dans ce cas :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{1-x} = -x - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 1} -2 = f(1)$$

donc  $f$  est continue en 1. Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $f(x) = -x - 1$  donc  $f$  est aussi dérivable en 1. Finalement, si  $f$  est solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ , alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -x - 1$$

★ **Synthèse** : la fonction  $f : x \mapsto -x - 1$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et elle est solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  car :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1-x)f'(x) - f(x) - 2x = x - 1 - (-x - 1) - 2x = 0$$

Ainsi :

la seule solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  est la fonction  $x \mapsto -x - 1$

2. On note  $(E)$  cette équation différentielle. On procède par analyse-synthèse.

★ **Analyse** : soit  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  une solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ . Alors  $f$  est solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}_-^*$  et sur  $\mathbb{R}_+^*$ . En résolvant  $(E)$  sur chacun de ces intervalles, on obtient qu'il existe  $C, D \in \mathbb{R}$  tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \begin{cases} C e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ D e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

De plus, en choisissant  $x = 0$  dans  $(E)$ , on a  $f(0) = 0$ . La fonction  $f$  est continue en 0 et  $e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} +\infty$  donc on a nécessairement  $C = 0$ . De plus :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} D e^{-\frac{1}{x}} = 0 \quad \text{car} \quad -\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$$

donc (en choisissant  $C = 0$  et quelle que soit la valeur de  $D$ ) la fonction  $f$  est continue en 0. Étudions maintenant la dérivabilité de  $f$  en 0. Comme  $f$  est la fonction nulle sur  $\mathbb{R}_-$ , elle est dérivable en 0 et  $f'_g(0) = 0$ . De plus :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} D \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} D X e^{-X} = 0$$

par croissances comparées. Ainsi,  $f$  est dérivable à droite en 0 et  $f'_d(0) = 0 = f'_g(0)$ . Finalement, si  $f$  est solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ , alors il existe  $D \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ D e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

★ **Synthèse** : si  $f$  est de la forme précédente, alors  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et est bien solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .

Finalement :

les solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ D e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (D \in \mathbb{R})$$

## Exercice 6

1. Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . La fonction  $f : x \mapsto e^{x \ln(a)}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  comme composée de fonctions qui le sont et on montre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \ln(a)^n a^x$$

2. Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La fonction  $f : x \mapsto e^{\alpha \ln(x)}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  si  $\alpha \notin \mathbb{Z}$  (si  $\alpha \in \mathbb{N}$ , alors  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et si  $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ , alors  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ ) et on montre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

3. La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et on montre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin(x) \quad \text{et} \quad f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos(x)$$

4. La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$  (comme inverse d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur cet ensemble qui ne s'annule pas) et on montre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$$

5. La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  comme quotient de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annule pas. De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f(x) = -1 - \frac{2}{x-1}$$

On montre alors par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{2(-1)^{n+1}n!}{(x-1)^{n+1}}$$

6. La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\left] -\infty, \frac{3}{2} \right[$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  où la fonction  $\ln$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Par composition, la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\left] -\infty, \frac{3}{2} \right[$ . On montre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \left] -\infty, \frac{3}{2} \right[, \quad f^{(n)}(x) = -\frac{2^n(n-1)!}{(3-2x)^n}$$

7. La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$  (comme inverse d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur cet ensemble qui ne s'annule pas) et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad f(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

La question 4. nous donne les dérivées successives de  $f$ .

8. La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  comme produit de fonctions qui le sont et, d'après la formule de Leibniz, on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $x \in \mathbb{R}$  (en notant  $g : x \mapsto x^3$  et  $h : x \mapsto e^x$ ) :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \underbrace{g^{(k)}(x)}_{=0 \text{ si } k>3} \underbrace{h^{(n-k)}(x)}_{=e^x} \\ &= \left( x^3 + 3nx^2 + 6 \frac{n(n-1)}{2} x + 6 \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \right) e^x \\ &= (x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)) e^x \end{aligned}$$

9. La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  comme produit de fonctions qui le sont. En notant  $g : x \mapsto x^2$  et  $h : x \mapsto \sin(x)$ , on a pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$  (d'après la formule de Leibniz) :

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \underbrace{g^{(k)}(x)}_{=0 \text{ si } k>2} h^{(n-k)}(x) \\ &= x^2 \sin^{(n)}(x) + 2nx \sin^{(n-1)}(x) + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} \sin^{(n-2)}(x) \end{aligned}$$

donc :

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n x^2 \sin(x) + 2n(-1)^{n-1} x \cos(x) + n(n-1)(-1)^{n-1} \sin(x)$$

et :

$$f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n x^2 \cos(x) + 2n(-1)^n x \sin(x) + n(n-1)(-1)^{n-1} \cos(x)$$

## Exercice 7

1. Tout d'abord, la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  comme composée de fonctions qui le sont. Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une fonction polynomiale  $P_n$  de degré  $n$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(x) = P_n(x) e^{x^2}$$

★ On note  $P_0$  la fonction constante égale à 1 sur  $\mathbb{R}$ . Cette fonction est polynomiale de degré 0 et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(0)}(x) = f(x) = e^{x^2} = P_0(x) e^{x^2}$$

- ★ Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose qu'il existe une fonction polynomiale  $P_n$  de degré  $n$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = P_n(x) e^{x^2}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) = (2xP_n(x) + P_n'(x)) e^{x^2} \\ &= P_{n+1}(x) e^{x^2} \end{aligned}$$

en posant  $P_{n+1}(X) = 2XP_n(X) + P_n'(X)$ . Une somme de polynômes, un produit de polynômes et la dérivée d'un polynôme est un polynôme donc  $P_{n+1}(X)$  est un polynôme. De plus,  $\deg(P_n) = n$  donc :

$$\deg(2XP_n(X)) = n + 1 \quad \text{et} \quad \deg(P_n'(X)) \leq n - 1$$

Ainsi,  $\deg(2XP_n(X)) \neq \deg(P_n'(X))$ . D'après les propriétés sur le degré, on a :

$$\deg(P_{n+1}(X)) = \max(\deg(2XP_n(X)), \deg(P_n'(X))) = n + 1$$

La propriété est donc vérifiée au rang  $n + 1$ .

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une fonction polynomiale  $P_n$  telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = P_n(x) e^{x^2}$$

2. La fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  comme l'inverse d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  qui ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ . On utilise de même un raisonnement par récurrence pour établir la propriété

**Exercice 8** Soient  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  et  $P$  une fonction polynomiale admettant  $n$  racines réelles distinctes que l'on note  $x_1, \dots, x_n$  telles que  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Soit  $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ . On a  $P(x_k) = P(x_{k+1}) = 0$  (par hypothèse). De plus,  $P$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc, en particulier,  $P$  est dérivable sur  $]x_k, x_{k+1}[$  et continue sur  $[x_k, x_{k+1}]$ . D'après le théorème de Rolle, il existe  $\xi_k \in ]x_k, x_{k+1}[$  tel que  $P'(\xi_k) = 0$ . Ainsi,  $P'$  admet pour racine  $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$  et ces nombres sont deux à deux distincts. En effet, si  $k, \ell \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$  est tel que  $k \neq \ell$ , on a  $\xi_k \in ]x_k, x_{k+1}[$  et  $\xi_\ell \in ]x_\ell, x_{\ell+1}[$  et  $]x_k, x_{k+1}[ \cap ]x_\ell, x_{\ell+1}[ = \emptyset$  donc  $\xi_k \neq \xi_\ell$ . Finalement :

$P'$  admet au moins  $n - 1$  racines réelles distinctes

## Exercice 9

1. La fonction Arctan est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \quad (\text{car } x^2 \geq 0)$$

En particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\text{Arctan}'(x)| \leq 1$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction Arctan est 1-lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$  i.e. :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(y)| \leq |x - y|$$

2. Les inégalités sont immédiates si  $x = 0$  (les trois nombres mis en jeu valant 0). Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . Comme la fonction exponentielle est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , elle est dérivable sur  $]0, x[$  et continue sur  $[0, x]$ . D'après le théorème des accroissements finis, il existe  $c_x \in ]0, x[$  tel que :

$$e^x - e^0 = (x - 0) \exp'(c_x) \quad \text{i.e.} \quad e^x - 1 = x e^{c_x}$$

Or  $c_x \in [0, x]$  et la fonction exponentielle est croissante sur  $\mathbb{R}$  donc  $1 \leq e^{c_x} \leq e^x$ . En multipliant par  $x \geq 0$ , on obtient :

$$x \leq x e^{c_x} \leq x e^x \quad \text{i.e.} \quad x \leq e^x - 1 \leq x e^x$$

Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x \leq e^x - 1 \leq x e^x$$

3. Les inégalités sont immédiates si  $x = 0$  (les trois nombres mis en jeu valant 0).

★ Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . La fonction  $\text{ch}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  donc  $\text{ch} \in \mathcal{D}(]0, x[, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}([0, x], \mathbb{R})$ . D'après le théorème des accroissements finis, il existe  $c_x \in ]0, x[$  tel que :

$$\text{ch}(x) - \text{ch}(0) = (x - 0) \text{ch}'(c_x) \quad \text{i.e.} \quad \text{ch}(x) - 1 = x \text{sh}(c_x)$$

Or  $c_x \in [0, x]$  et la fonction  $\text{sh}$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  donc  $0 = \text{sh}(0) \leq \text{sh}(c_x) \leq \text{sh}(x)$ . En multipliant par  $x \geq 0$ , on obtient :

$$0 \leq x \text{sh}(c_x) \leq x \text{sh}(x) \quad \text{i.e.} \quad 0 \leq \text{ch}(x) - 1 \leq x \text{sh}(x)$$

★ Soit  $x \in \mathbb{R}_-^*$ . On a  $-x \in \mathbb{R}_+^*$  donc, d'après ce qui précède :

$$0 \leq \text{ch}(-x) - 1 \leq -x \text{sh}(-x) \quad \text{i.e.} \quad 0 \leq \text{ch}(x) - 1 \leq x \text{sh}(x)$$

car les fonctions  $\text{ch}$  et  $\text{sh}$  sont respectivement paire et impaire.

Finalement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \text{ch}(x) - 1 \leq x \text{sh}(x)$$

## Exercice 10

1. Soit  $x \in \mathbb{R}_+^*$ . La fonction  $f : t \mapsto \ln(t)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ . En particulier,  $f$  est donc dérivable sur  $]x, x+1[$  et continue sur  $[x, x+1]$ . D'après le théorème des accroissements finis, il existe  $c_x \in ]x, x+1[$  tel que :

$$f(x+1) - f(x) = f'(c_x)(x+1-x) \quad i.e. \quad \ln(x+1) - \ln(x) = \frac{1}{c_x}$$

Or  $0 < x < c_x < x+1$  et la fonction inverse est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  donc :

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c_x} < \frac{1}{x} \quad i.e. \quad \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

Finalement :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}}$$

2. Soit  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . D'après la question 1., on a :

$$\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p} \leq \ln(p) - \ln(p-1)$$

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On somme les inégalités précédentes sur les entiers  $p \in \llbracket n+1, kn \rrbracket \subset \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  :

$$\sum_{k=n+1}^{kn} (\ln(p+1) - \ln(p)) \leq \sum_{k=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \leq \sum_{k=n+1}^{kn} (\ln(p) - \ln(p-1)),$$

*i.e.* (les sommes étant télescopiques) :

$$\ln(kn+1) - \ln(n+1) \leq \sum_{k=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \leq \ln(kn) - \ln(n)$$

Finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \ln\left(\frac{kn+1}{n+1}\right) \leq \sum_{k=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \leq \ln(k)$$

Or :

$$\ln\left(\frac{kn+1}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{k + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(k)$$

donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{kn} \frac{1}{p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(k)}$$

## Exercice 11

1. La fonction  $f$  est dérivable en 0 et  $f'(0) = 0$  donc :

$$g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} f'(0) = 0$$

De plus,  $f$  est continue en  $a$  (car elle y est dérivable) et  $f(a) = 0$  donc :

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow a^-} \frac{f(a)}{a} = 0$$

On en déduit que la fonction  $g$  est prolongeable par continuité en 0 et en  $a$ . Ainsi, la fonction :

$$\tilde{g} : \begin{cases} [0, a] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \{0, a\} \\ g(x) & \text{si } x \in ]0, a[ \end{cases} \end{cases}$$

est continue sur  $[0, a]$ . Elle est de plus dérivable sur  $]0, a[$  (comme quotient de fonctions qui le sont) et  $\tilde{g}(0) = \tilde{g}(a) = 0$ . D'après le théorème de Rolle, il existe  $c \in ]0, a[$  tel que  $\tilde{g}'(c) = 0$  *i.e.* tel que  $g'(c) = 0$  (car  $c \in ]0, a[$  et  $\tilde{g}|_{]0, a[} = g$ ). Finalement :

$$\boxed{\text{la dérivée de } g \text{ s'annule sur } ]0, a[}$$

2. On a :

$$\forall x \in ]0, a[, \quad g'(x) = \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2}$$

D'après la question 1., il existe  $c \in ]0, a[$  tel que  $g'(c) = 0$ . On a donc :

$$c f'(c) - f(c) = 0$$

L'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $c$  est :

$$y = f'(c)(x - c) + f(c) = f'(c)x + \underbrace{f(c) - c f'(c)}_{=0} = f'(c)x$$

La droite  $(T)$  passe donc par l'origine. Finalement :

$$\boxed{\text{il existe } c \in ]0, a[ \text{ en lequel la tangente à } \mathcal{C}_f \text{ passe par l'origine}}$$

## Exercice 12

Soit  $f \in \mathcal{C}^1([0, a], \mathbb{R})$  telle que  $f(0) = f'(0) = 0$  et  $f(a)f'(a) < 0$ . On a donc :

$$(f(a) > 0 \text{ et } f'(a) < 0) \quad \text{ou} \quad (f(a) < 0 \text{ et } f'(a) > 0)$$

Quitte à remplacer  $f$  par  $-f$ , on peut supposer que  $f(a) > 0$  et  $f'(a) < 0$ . En raisonnant par l'absurde, montrons qu'il existe  $c \in [0, a]$  tel que  $f'(c) < 0$ . On suppose donc que :

$$\forall x \in [0, a], \quad f'(x) \geq 0$$

La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0, a]$  donc  $f'$  est continue en  $a$ . En faisant tendre  $x$  vers  $a$  dans l'inégalité précédente, on a :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f'(x) \geq 0 \quad i.e. \quad f'(a) \geq 0$$

Ceci contredit le fait que  $f'(a) < 0$ . Finalement, il existe  $c \in [0, a]$  tel que  $f'(c) < 0$ . On a de plus  $f'(a) > 0$  et la fonction  $f'$  est continue sur  $[c, a]$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $b \in [c, a]$  tel que  $f'(b) = 0$ . Finalement :

$$\boxed{\text{il existe } b \in ]0, a[ \text{ tel que } f'(b) = 0}$$

### Exercice 13

- Supposons qu'il existe  $c \in [a, b[$  tel que  $g(c) = g(b)$ . La fonction  $g$  est continue sur  $[c, b]$  et dérivable sur  $]c, b[$  (car  $g$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]c, b[$  et  $[c, b] \subset [a, b]$ ) donc, d'après le théorème de Rolle, il existe  $d \in ]c, b[$  tel que  $g'(d) = 0$ . Ceci est absurde car la fonction  $g'$  ne s'annule pas dans  $]a, b[$  par hypothèse. Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in ]a, b[, \quad g(x) \neq g(b)}$$

- Soit  $t \in [a, b]$ . On va appliquer le théorème de Rolle à la fonction  $h$ . On a :

$$\begin{aligned} h(t) &= f(t) - \alpha g(t) = f(t) - \frac{f(t) - f(b)}{g(t) - g(b)} \times g(t) \\ &= \frac{f(t)(g(t) - g(b)) - g(t)(f(t) - f(b))}{g(t) - g(b)} \\ &= \frac{g(t)f(b) - f(t)g(b)}{g(t) - g(b)} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} h(b) &= f(b) - \alpha g(b) = f(b) - \frac{f(t) - f(b)}{g(t) - g(b)} \times g(b) \\ &= \frac{f(b)(g(t) - g(b)) - g(b)(f(t) - f(b))}{g(t) - g(b)} \\ &= \frac{g(t)f(b) - f(t)g(b)}{g(t) - g(b)} \\ &= h(t) \end{aligned}$$

De plus, la fonction  $h$  est continue sur  $[a, b]$  et dérivable sur  $]a, b[$  (car  $f$  et  $g$  le sont) donc  $h$  est continue sur  $[t, b]$  et dérivable sur  $]t, b[$  (car  $[t, b] \subset [a, b]$ ). D'après le lemme de Rolle, il existe  $c_t \in ]t, b[$  tel que  $h'(c_t) = 0$ . On a alors :

$$f'(c_t) - \alpha g'(c_t) = 0 \quad i.e. \quad \alpha = \frac{f'(c_t)}{g'(c_t)} \quad (\text{car } g'(c_t) \neq 0)$$

Ainsi :

$$\boxed{\exists c_t \in ]t, b[, \quad \frac{f(t) - f(b)}{g(t) - g(b)} = \frac{f'(c_t)}{g'(c_t)}}$$

- On a :

$$\forall t \in [a, b[, \quad t \leq c(t) \leq b$$

D'après le théorème des gendarmes, on a  $c(t) \xrightarrow{t \rightarrow b^-} b$ . La fonction  $\frac{f'}{g'}$  admet une limite égale à  $\ell \in \mathbb{R}$  en  $b^-$  donc, d'après le théorème de composition des limites, on a :

$$\frac{f'(c_t)}{g'(c_t)} \xrightarrow{t \rightarrow b^-} \ell$$

La question précédente permet de conclure que :

$$\boxed{\frac{f(t) - f(b)}{g(t) - g(b)} \xrightarrow{t \rightarrow b^-} \ell}$$

- Posons  $a = -1$ ,  $b = 0$ ,  $f = \cos - \exp$  et  $g : x \mapsto (x+1)e^x$ . Les fonctions  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$  donc, en particulier, elles sont continues sur  $[-1, 0]$  et dérivables sur  $] -1, 0[$ . De plus, pour tout  $x \in ] -1, 0[$ , on a :

$$g'(x) = e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x \neq 0 \quad \text{et} \quad f'(x) = -\sin(x) - e^x$$

Par ailleurs :

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-\sin(x) - e^x}{(x+2)e^x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{2}$$

donc, d'après la règle de l'Hôpital,

$$\boxed{\frac{\cos(x) - e^x}{(x+1)e^x - 1} = \frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{2}}$$

### Exercice 14

- La fonction  $\text{th}$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  donc, d'après le théorème de la bijection, la fonction  $\text{th}$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur :

$$\text{th}(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(x) \right[ = ] -1, 1[$$

car :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$

et comme la fonction  $\text{th}$  est impaire sur  $\mathbb{R}$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(x) = -1$$

Finalement :

la fonction  $\text{th}$  est bijective de  $\mathbb{R}$  sur  $] -1, 1[$ 

2. Soit  $y \in ] -1, 1[$ . On résout l'équation  $\text{th}(x) = y$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \text{th}(x) = y &\iff \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = y \iff e^{2x} - 1 = y e^{2x} + y \\ &\iff e^{2x} (1 - y) = y + 1 \\ &\iff e^{2x} = \frac{y + 1}{1 - y} \quad (\text{car } y \neq 1) \\ &\iff 2x = \ln \left( \frac{y + 1}{1 - y} \right) \end{aligned}$$

par injectivité de la fonction  $\ln$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et car  $\frac{y + 1}{1 - y} > 0$  car  $y \in ] -1, 1[$ . Ainsi :

$$\text{th}(x) = y \iff x = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{y + 1}{1 - y} \right)$$

Ainsi :

$$\text{Argth} : \begin{cases} ] -1, 1[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{1}{2} \ln \left( \frac{x + 1}{1 - x} \right) \end{cases}$$

3. ★ **Première méthode :** en utilisant l'expression de  $\text{Argth}$

La fonction  $x \mapsto \frac{x + 1}{1 - x}$  est dérivable sur  $] -1, 1[$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  où la fonction  $\ln$  est dérivable. Par composition, la fonction  $\text{Argth}$  est dérivable sur  $] -1, 1[$  et :

$$\begin{aligned} \forall x \in ] -1, 1[, \quad \text{Argth}'(x) &= \frac{1}{2} \times \frac{\frac{(1-x)-(-1)(1+x)}{(1-x)^2}}{\frac{x+1}{1-x}} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{(1-x)^2} \times \frac{1-x}{1+x} \\ &= \frac{1}{1-x^2} \end{aligned}$$

★ **Deuxième méthode :** en utilisant le théorème de dérivabilité d'une bijection réciproque

La fonction  $\text{th}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{th}'(x) = \frac{1}{\text{ch}(x)^2} \neq 0$$

D'après le théorème de dérivabilité d'une fonction réciproque, la fonction  $\text{Argth} = \text{th}^{-1}$  est dérivable sur  $\text{th}(\mathbb{R}) = ] -1, 1[$  et :

$$\begin{aligned} \forall x \in ] -1, 1[, \quad \text{Argth}'(x) &= \frac{1}{\text{th}'(\text{Argth}(x))} \\ &= \frac{1}{1 - \text{th}(\text{Argth}(x))^2} \\ &= \frac{1}{1 - x^2} \quad (\text{car } \text{th} \circ \text{Argth} = \text{Id}_{]-1, 1[}) \end{aligned}$$

Finalement :

la fonction  $\text{Argth}$  est dérivable sur  $] -1, 1[$  et :

$$\forall x \in ] -1, 1[, \quad \text{Argth}'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

### Exercice 15

1. La fonction  $f$  est continue sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  comme l'inverse d'une fonction continue (la fonction cosinus) qui ne s'annule pas.

Étudions les variations de  $f$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ . La fonction  $f$  est dérivable sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  et :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \quad f'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}$$

donc :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[, \quad f'(x) > 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = 0$$

La fonction  $f$  est donc strictement croissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ |
|-----|---|-----------------|
| $f$ | 1 | $\sqrt{2}$      |

D'après le théorème de la bijection :

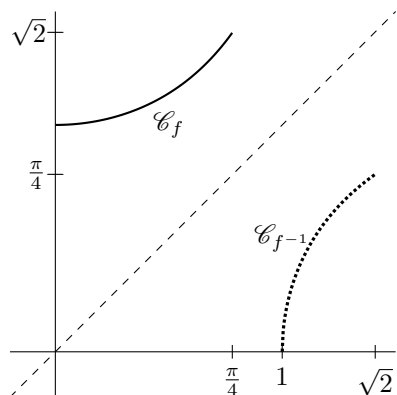
la fonction  $f$  réalise une bijection de  $I$  sur l'intervalle  $J = [1, \sqrt{2}]$ 

2. D'après le théorème de la bijection, la fonction  $f^{-1}$  est continue et strictement croissante sur  $J$ .



|          |   |                 |
|----------|---|-----------------|
| $x$      | 1 | $\sqrt{2}$      |
| $f^{-1}$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ |

On sait que, dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de  $f$  et de  $f^{-1}$  sont symétriques par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .



3. Soit  $x \in J$ . On sait que  $f \circ f^{-1} = \text{Id}_J$  donc en particulier  $f(f^{-1}(x)) = x$ , c'est-à-dire  $\frac{1}{\cos(f^{-1}(x))} = x$  et donc  $\cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x}$ . De plus :

$$\sin(f^{-1}(x))^2 = 1 - \cos(f^{-1}(x))^2 = 1 - \frac{1}{x^2} \quad \text{et donc} \quad |\sin(f^{-1}(x))| = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$

Or  $f^{-1}(x) \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  donc  $\sin(f^{-1}(x)) \geq 0$  et  $|\sin(f^{-1}(x))| = \sin(f^{-1}(x))$ . Finalement :

$$\forall x \in J, \quad \cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$

4. La fonction  $f$  est dérivable sur  $I$  et :

$$\left(\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right], f'(x) \neq 0\right) \quad \text{et} \quad f'(0) = 0$$

D'après le théorème de dérivabilité d'une réciproque :

$$f^{-1} \text{ est dérivable sur } f\left(\left]0, \frac{\pi}{4}\right]\right) = ]1, \sqrt{2}] = J \setminus \{1\}$$

et :

$$\begin{aligned} \forall x \in J \setminus \{1\}, \quad (f^{-1})'(y) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{\cos(f^{-1}(x))^2}{\sin(f^{-1}(x))} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \\ &= \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \times |x| \\ &= \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{car } x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Finalement, pour tout } x \in J \setminus \{1\}, \text{ on a } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}}.$$

### Exercice 16

1. La fonction  $f$  est dérivable sur  $[1, +\infty[$  comme quotient de fonctions qui le sont (le dénominateur ne s'annulant pas) et :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{2(\ln(x) + 1) - 2x \times \frac{1}{x}}{(\ln(x) + 1)^2} = \frac{2 \ln(x)}{(\ln(x) + 1)^2} \geq 0$$

La fonction  $f$  est donc croissante sur  $[1, +\infty[$  et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(x)} \times \frac{2}{1 + \frac{1}{\ln(x)}} = 0$$

par croissances comparées. On en déduit le tableau de variation de  $f$  suivant :

|     |   |           |
|-----|---|-----------|
| $x$ | 1 | $+\infty$ |
| $f$ | 2 | $+\infty$ |

On a :

$$f([1, +\infty]) = [2, +\infty[ \subset [1, +\infty[$$

donc l'intervalle  $[1, +\infty[$  est stable par  $f$ . Montrons alors par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le nombre  $u_n$  est bien défini et tel que  $u_n \geq 1$ .

★ Il n'y a rien à démontrer pour  $n = 0$  car  $u_0 = 1 \geq 1$ .

★ Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $u_n$  est bien défini et appartient à  $[1, +\infty[$ . Comme  $u_n \geq 1$ , le nombre  $u_n$  appartient au domaine de définition de  $f$  et donc  $u_{n+1} = f(u_n)$  est bien défini. De plus, comme  $[1, +\infty[$  est stable par  $f$ , on a  $u_{n+1} = f(u_n) \in [1, +\infty[$ . La propriété est donc établie au rang  $n + 1$ .

2. (a) Soit  $x \in [1, +\infty[$ . On sait que  $f'(x) \geq 0$  (cf. question 1.) donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - |f'(x)| &= \frac{1}{2} - f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2 \ln(x)}{(\ln(x) + 1)^2} \\ &= \frac{(\ln(x) + 1)^2 - 4 \ln(x)}{2(\ln(x) + 1)^2} \\ &= \frac{\ln(x)^2 - 2 \ln(x) + 1}{2(\ln(x) + 1)^2} \\ &= \frac{(\ln(x) - 1)^2}{2 \ln(x) + 1)^2} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

(b) La fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[1, +\infty[$  et la fonction  $|f'|$  est majorée par  $\frac{1}{2}$  sur cet intervalle. D'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction  $f$  est  $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur  $[1, +\infty[$  :

$$\forall x, y \in [1, +\infty[, \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{2}$$

On a  $e \in [1, +\infty[$  et  $f(e) = e$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on sait que  $u_n \in [1, +\infty[$  donc, d'après l'inégalité précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - e| = |f(u_n) - f(e)| \leq \frac{|u_n - e|}{2} \quad (*)$$

Montrons maintenant par récurrences les inégalités souhaitées, à savoir :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - e| \leq \frac{e - 1}{2^n}$$

★ L'inégalité est immédiate pour  $n = 0$  (les deux nombres mis en jeu sont égaux à  $e - 1$  car  $u_0 = 1 \leq e$ ).

★ Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $|u_n - e| \leq \frac{e - 1}{2^n}$ . Montrons que :

$$|u_{n+1} - e| \leq \frac{e - 1}{2^{n+1}}$$

D'après (\*), on a :

$$|u_{n+1} - e| \leq \frac{1}{2} \times |u_n - e|$$

Or  $|u_n - e| \leq \frac{e - 1}{2^n}$  (hypothèse de récurrence) donc, en multipliant par  $\frac{1}{2} \geq 0$ , on a :

$$\frac{1}{2} \times |u_n - e| \leq \frac{1}{2} \times \frac{e - 1}{2^n} = \frac{e - 1}{2^{n+1}}$$

Par transitivité de la relation  $\leq$ , on a bien  $|u_{n+1} - e| \leq \frac{e - 1}{2^{n+1}}$ . L'inégalité est donc vérifiée au rang  $n + 1$ .

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - e| \leq \frac{e - 1}{2^n}$$

(c) D'après les inégalités précédentes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e - \frac{e - 1}{2^n} \leq u_n \leq e + \frac{e - 1}{2^n}$$

Or  $e \pm \frac{e - 1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e$  donc, d'après le théorème des gendarmes,

$$\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente de limite } e$$

## Exercice 17

1. On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$ . Celle-ci est dérivable sur  $[0, 1]$  et :

$$\forall x \in [0, 1], \quad f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x \times e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \geq 0$$

On en déduit que  $f$  est croissante sur  $[0, 1]$  :

| $x$ | 0             | 1                      |
|-----|---------------|------------------------|
| $f$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{e}{e+1} \leq 1$ |

On a  $f([0,1]) = \left[\frac{1}{2}, \frac{e}{e+1}\right] \subset [0,1]$  donc l'intervalle  $[0,1]$  est stable par  $f$ .  
Comme  $u_0 \in [0,1]$ , une récurrence immédiate va nous permettre d'obtenir que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ .

★ On sait que  $u_0 \in [0,1]$  donc la propriété est vraie au rang 0.

★ Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $u_n \in [0,1]$ . Alors  $f(u_n) \in f([0,1])$ , c'est-à-dire  $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{e}{e+1}\right] \subset [0,1]$ . La propriété est donc vraie au rang  $n+1$ .

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0,1]}$$

2. On considère la fonction  $g : x \mapsto x(e^x + 1) - e^x$ . La fonction  $g$  est dérivable sur  $[0,1]$  et :

$$\forall x \in [0,1], \quad g'(x) = e^x + 1 + x e^x - e^x = 1 + x e^x > 0$$

La fonction  $g$  est donc strictement croissante sur  $[0,1]$ . Comme elle y est de plus continue, le théorème de la bijection permet d'affirmer que  $g$  induit une bijection de  $[0,1]$  sur :

$$g([0,1]) = [g(0), g(1)] = [-1, 1]$$

qui contient 0. Il existe donc un unique nombre réel  $\alpha \in [0,1]$  tel que  $g(\alpha) = 0$ , c'est-à-dire tel que  $f(\alpha) = \alpha$ . Ainsi :

$$\boxed{\exists ! \alpha \in [0,1], \quad \frac{e^\alpha}{e^\alpha + 1} = \alpha}$$

3. (a) On utilise l'inégalité des accroissements finis. La fonction  $f$  est dérivable sur  $[0,1]$  et :

$$\forall x \in [0,1], \quad 0 \leq f'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

En étudiant les variations de  $f'$  sur  $[0,1]$ , on obtient que :

$$\forall x \in [0,1], \quad |f'(x)| = f'(x) \leq \frac{1}{4}$$

La fonction  $f$  est donc  $\frac{1}{4}$ -lipschitzienne sur  $[0,1]$  (d'après l'inégalité des accroissements finis) c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in [0,1], \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4} \times |x - y|$$

En particulier, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a  $u_n \in [0,1]$  et  $\alpha \in [0,1]$  donc :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{4} \times |u_n - \alpha| \quad \text{c'est-à-dire} \quad |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} \times |u_n - \alpha|$$

On démontre ensuite que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

à l'aide d'un raisonnement par récurrence et en utilisant l'inégalité précédente dans l'hérédité (pour le raisonnement, voir l'exercice 16 fait en TD). Enfin, on a  $|u_0 - \alpha| \leq 1$  car  $-1 \leq u_0 - \alpha \leq 1$  (puisque  $u_0, \alpha \in [0,1]$ ). On en déduit donc que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n}$$

On a  $\frac{1}{4} \in ]-1, 1[$  donc  $\left(\frac{1}{4}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $u_n - \alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , soit encore :

$$\boxed{u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha}$$

(b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour que  $u_n$  soit une approximation de  $\alpha$  à  $10^{-5}$  près, il suffit que  $\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq 10^{-5}$  d'après la question précédente, c'est-à-dire que  $4^n \geq 10^5$ . Or  $4^9 = 262144 > 10^5$  donc :

$$\boxed{u_9 \text{ est une valeur approchée de } \alpha \text{ à } 10^{-5} \text{ près}}$$

## Exercice 18

★ Tout d'abord, la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  comme produit de fonctions qui le sont.

★ De plus, par croissances comparées, on a  $x^2 \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ , i.e.  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$  donc  $f$  est prolongeable par continuité en 0 en la fonction :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \end{cases} \begin{cases} \mathbb{R} \\ \begin{cases} x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

À ce stade, la fonction  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Il reste donc à montrer que  $g$  est dérivable en 0 et que  $g'$  est continue en 0.

- ★ Étudions la dérivabilité de  $g$  en 0 en utilisant le théorème de la limite de la dérivée. On sait que  $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g'(x) = f'(x) = 2x \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln(x) + x$$

donc  $g'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \in \mathbb{R}$  (en utilisant à nouveau les croissances comparées). D'après le théorème évoqué :

- $g$  est dérivable en 0 ;
- $g'(0) = 0$  ;
- et  $g'$  est continue en 0.

Finalement, la fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ . On peut donc conclure que :

la fonction  $f$  est prolongeable en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$

**Remarque :** l'avantage de ce théorème est qu'il permet de traiter à la fois la dérivabilité de  $g$  en 0 et la continuité de  $g'$  en 0.

Sans utiliser le théorème, on peut procéder comme suit (on reprend à partir du troisième point du raisonnement).

- ★ Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on a :

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \ln(x) - 0}{x} = x \ln(x)$$

donc  $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \in \mathbb{R}$  (par croissances comparées). Ainsi,  $g$  est dérivable en 0 et  $g'(0) = 0$ .

- ★ Ensuite :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g'(x) = 2x \ln(x) + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln(x) + x$$

et, par croissances comparées,  $g'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 = g'(0)$ . La fonction  $g'$  est donc continue en 0.

## Exercice 19

1. La fonction  $x \mapsto |x|$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  où la fonction  $\ln$  est dérivable. Par composition, la fonction  $f : x \mapsto \ln(|x|)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Ainsi :

la dérivée de  $f$  sur  $\mathbb{R}^*$  est  $f' : x \mapsto \frac{1}{x}$

2. La fonction  $x \mapsto |x|$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  où la fonction  $\ln$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . Par composition, la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ . La fonction  $x \mapsto x^3$  est également de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$  donc, par produit, la fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}^*$ . On en déduit que le seul problème de régularité se trouve ne 0.

- ★ Par croissances comparées, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \ln(|x|) = 0 = g(0)$$

donc la fonction  $g$  est continue en 0.

- ★ Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , on a :

$$g'(x) = 3x^2 \ln(|x|) + x^3 f'(x) = 3x^2 \ln(|x|) + x^2$$

Ainsi (par croissances comparées)  $g'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ . D'après le théorème sur la limite de la dérivée :

- la fonction  $g$  est dérivable en 0 ;
- $g'(0) = 0$  ;
- la fonction  $g'$  est continue en 0.

À ce stade, la fonction  $g$  est donc de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

- ★ Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , on a :

$$g''(x) = 6x \ln(|x|) + 3x^2 f'(x) + 2x = 6x \ln(|x|) + 5x$$

On a encore  $g''(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$  donc :

- la fonction  $g'$  est dérivable en 0 ;
- $g''(0) = 0$  ;
- la fonction  $g''$  est continue en 0.

À ce stade, la fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^*$ .

- ★ Pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ , on a :

$$g^{(3)}(x) = 6 \ln(|x|) + 6x f'(x) + 5 = 6 \ln(|x|) + 11$$

donc  $g^{(3)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$ . La fonction  $g''$  n'est pas pas dérivable en 0.

Finalement :

$$g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \setminus \mathcal{C}^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

**Exercice 20** On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = f(\sqrt{x})$$

★ Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$ , on a :

$$g(x^2) = f(\sqrt{x^2}) = f(|x|) = f(x) \quad (\text{car } x \geq 0)$$

Il s'agit maintenant de montrer que la fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

★ On sait que la fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$  où la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  (car  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+$  par hypothèse). Par composition, la fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

★ Il reste à montrer que  $g$  est continue et dérivable en 0 et que  $g'$  est continue en 0.

— La fonction  $f$  est continue en 0 donc  $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} f(0)$ . De plus,  $\sqrt{x} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$  donc, d'après le théorème de composition des limites, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(\sqrt{x}) = f(0) = g(0)$$

La fonction  $g$  est donc continue en 0.

— De plus :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = \frac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \times \frac{f'(\sqrt{x}) - f'(0)}{\sqrt{x}}$$

car  $f'(0) = 0$  par hypothèse. Comme  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+$ , la fonction  $f'$  est dérivable en 0. Il existe donc  $\ell \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\frac{f'(t) - f'(0)}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \ell \quad (\text{où } \ell = f''(0))$$

Or  $\sqrt{x} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 0$  donc, par composition des limites,

$$\frac{f'(\sqrt{x}) - f'(0)}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} \ell \quad \text{et donc} \quad g'(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} \frac{\ell}{2} \in \mathbb{R}$$

On en déduit que la fonction  $g$  est dérivable en 0 (avec  $g'(0) = \frac{\ell}{2}$ ) et que  $g'$  est continue en 0.

Finalement, la fonction  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

On peut donc conclure que :

$$\boxed{\exists g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = g(x^2)}$$