Dérivabilité

1 Définition de la dérivabilité

Exercice 1 Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leqslant 1 \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$;
2. $g : x \longmapsto \begin{cases} x^2+x & \text{si } x \leqslant 1 \\ ax^3+bx+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, où $a, b \in \mathbb{R}$;
3. $h : x \longmapsto \dfrac{x}{|x|+|x^2-1|}$.

Exercice 2 (symétries de f') Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f est paire sur $\mathbb{R}$. Que dire de la fonction f' ?
2. Et si f est impaire ? périodique ?

Exercice 3 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a. Calculer la limite :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a+h^2)}{h}$$

Exercice 4 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f \in \mathscr{D}([a,b],\mathbb{R})$. On suppose que :

$$f(a) = f(b) = 0, \qquad f'(a) > 0 \qquad \text{et} \qquad f'(b) > 0$$

Montrer que f s'annule sur $]a,b[$.

Exercice 5 (équations différentielles et recollements)

1. On note (E) l'équation différentielle $(1-x)y' = y + 2x$ d'inconnue $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
   (a) Résoudre (E) sur les intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.
   (b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$ en procédant par analyse-synthèse.
2. Même question pour l'équation différentielle $x^2y' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

2 Dérivées successives

Exercice 6 Calculer les dérivées successives des fonctions suivantes :

1. $f : x \longmapsto a^x$ $(a > 0)$
2. $f : x \longmapsto x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
3. $f = \sin$
4. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x+a}$ $(a \in \mathbb{R})$
5. $f : x \longmapsto \dfrac{1+x}{1-x}$
6. $f : x \longmapsto \ln(3-2x)$
7. $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$
8. $f : x \longmapsto x^3\,\mathrm{e}^x$
9. $f : x \longmapsto x^2\sin(x)$

Exercice 7

1. Soit $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{x^2}$. Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe une fonction polynomiale P_n telle que $f^{(n)} : x \longmapsto P_n(x)\,\mathrm{e}^{x^2}$. Préciser le degré de P_n.
2. Soit $g : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe une fonction polynomiale P_n telle que $g^{(n)} : x \longmapsto \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$. Préciser le degré de P_n.

3 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Exercice 8 Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale admettant n racines réelles distinctes. Montrer P' admet au moins $n-1$ racines réelles distinctes.

Exercice 9 (accroissements finis) Montrer que :

1. pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(y)| \leqslant |x-y|$;
2. pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x \leqslant \mathrm{e}^x - 1 \leqslant x\,\mathrm{e}^x$;
3. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \mathrm{ch}(x) - 1 \leqslant x\,\mathrm{sh}(x)$.

Exercice 10

1. Montrer que :

$$\forall x > 0, \qquad \frac{1}{x+1} < \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

2. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}$.

Exercice 11 Soient $a > 0$ et $f : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que :

$$f(0) = f(a) = 0 \qquad \text{et} \qquad f'(0) = 0$$

1. Montrer que la dérivée de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{f(x)}{x}$ s'annule sur $]0, a[$.
2. En déduire qu'il existe un point autre que l'origine en lequel la tangente à la courbe représentative de f passe par l'origine.

Exercice 12 Soient $a > 0$ et $f : [0, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f(a)f'(a) < 0$. Montrer qu'il existe $b \in]0, a[$ tel que $f'(b) = 0$.

Exercice 13 (généralisation du théorème de Rolle) Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(0)$. Montrer que f' s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 14 (règle de l'Hôpital) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que :

$$\forall x \in]a, b[, \qquad g'(x) \neq 0$$

1. Démontrer que, pour tout $x \in [a, b[$, on a $g(x) \neq g(b)$.
2. Soit $t \in [a, b[$. On pose $\alpha = \dfrac{f(t) - f(b)}{g(t) - g(b)}$ et on considère la fonction :
$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - \alpha g(x) \end{array} \right.$$
Montrer qu'il existe $c_t \in]t, b[$ tel :
$$\frac{f(t) - f(b)}{g(t) - g(b)} = \frac{f'(c_t)}{g'(c_t)}$$
3. On suppose qu'il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x \to b^-]{} \ell$. Montrer alors que :
$$\frac{f(t) - f(b)}{g(t) - g(b)} \xrightarrow[t \to b^-]{} \ell$$
4. *Application* : déterminer $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\cos(x) - \mathrm{e}^x}{(x+1)\,\mathrm{e}^x - 1}$.

4 Dérivabilité d'une fonction réciproque

Exercice 15 (fonction Argth)

1. Justifier que la fonction th induit une application bijective de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer.
2. Déterminer l'application réciproque de cette bijection. *Cette réciproque est notée* Argth *et est appelée fonction argument tangente hyperbolique.*
3. En utilisant deux méthodes différentes, étudier la dérivabilité de la fonction Argth et calculer sa dérivée.

Exercice 16 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ par :

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Que peut-on dire de f^{-1} ? Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1}.
3. Justifier que :
$$\forall x \in J, \qquad \cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$
4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et que :
$$\forall x \in J \setminus \{1\}, \qquad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

5 Suites récurrentes

Exercice 17 On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x}{\ln(x) + 1}$ sur $[1, +\infty[$.

1. Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que :
$$\forall x \in [1, +\infty[, \qquad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$$
3. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \mathrm{e}| \leqslant \frac{\mathrm{e} - 1}{2^n}$$
4. Que peut-on conclure ?

Exercice 18 Soit $u_0 \in [0, 1]$. On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{u_n}}{\mathrm{e}^{u_n} + 1}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0, 1]$.

2. Montrer qu'il existe un unique nombre réel α tel que $\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha}}{\mathrm{e}^{\alpha}+1} = \alpha$, et que $\alpha \in [0,1]$.
3. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

(b) Déterminer à la main un rang n explicite pour lequel u_n est une approximation de α à 10^{-5} près.

6 Limite de la dérivée

Exercice 19 Montrer que la fonction $f : x \longmapsto x^2 \ln(x)$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 20
1. Déterminer la dérivée de $f : x \longmapsto \ln(|x|)$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Pour quelle valeur maximale de $k \in \mathbb{N}$ la fonction $g : x \longmapsto \begin{cases} x^3 \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est-elle de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 21 Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) = g(x^2)$$