

DÉRIVABILITÉ

1 Définition de la dérivabilité

Exercice 1 Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1)^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$;
2. $g : x \mapsto \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x \leq 1 \\ ax^3 + bx + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, où $a, b \in \mathbb{R}$;
3. $h : x \mapsto \frac{x}{|x| + |x^2 - 1|}$.

Exercice 2 (symétries de f') Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f est paire sur $\mathbb{R}$. Que dire de la fonction f' ?
2. Et si f est impaire ? périodique ?

Exercice 3 Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a . Calculer la limite :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a+h^2)}{h}$$

Exercice 4 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f \in \mathcal{D}([a, b], \mathbb{R})$. On suppose que :

$$f(a) = f(b) = 0, \quad f'(a) > 0 \quad \text{et} \quad f'(b) > 0$$

Montrer que f s'annule sur $]a, b[$.

Exercice 5 (équations différentielles et recollements) 1. On note (E) l'équation différentielle $(1-x)y' = y + 2x$ d'inconnue $y \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- (a) Résoudre (E) sur les intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.
- (b) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$ en procédant par analyse-synthèse.

2. Même question pour l'équation différentielle $x^2 y' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

2 Dérivées successives

Exercice 6 Calculer les dérivées successives des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto a^x$ ($a > 0$)
2. $f : x \mapsto x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)
3. $f = \sin$
4. $f : x \mapsto \frac{1}{x+a}$ ($a \in \mathbb{R}$)
5. $f : x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$
6. $f : x \mapsto \ln(3-2x)$
7. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$
8. $f : x \mapsto x^3 e^x$
9. $f : x \mapsto x^2 \sin(x)$

Exercice 7 1. Soit $f : x \mapsto e^{x^2}$. Montrer que, pour tout entier naturel n , il existe une fonction polynomiale P_n telle que $f^{(n)} : x \mapsto P_n(x) e^{x^2}$. Préciser le degré de P_n .

2. Soit $g : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Montrer que, pour tout entier naturel n , il existe une fonction polynomiale P_n telle que $g^{(n)} : x \mapsto \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$. Préciser le degré de P_n .

3 Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Exercice 8 Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale admettant n racines réelles distinctes. Montrer P' admet au moins $n-1$ racines réelles distinctes.

Exercice 9 (accroissements finis) Montrer que :

1. pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(y)| \leq |x - y|$;
2. pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x \leq e^x - 1 \leq x e^x$;
3. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \text{ch}(x) - 1 \leq x \text{sh}(x)$.

Exercice 10 1. Montrer que :

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} < \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

2. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}$.

Exercice 11 Soient $a > 0$ et $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que :

$$f(0) = f(a) = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = 0$$

1. Montrer que la dérivée de la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ s'annule sur $]0, a[$.
2. En déduire qu'il existe un point autre que l'origine en lequel la tangente à la courbe représentative de f passe par l'origine.

Exercice 12 Soient $a > 0$ et $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f(a)f'(a) < 0$. Montrer qu'il existe $b \in]0, a[$ tel que $f'(b) = 0$.

Exercice 13 (généralisation du théorème de Rolle) Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = f(0)$. Montrer que f' s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 14 (règle de l'Hôpital) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que :

$$\forall x \in]a, b[, \quad g'(x) \neq 0$$

1. Démontrer que, pour tout $x \in [a, b]$, on a $g(x) \neq g(b)$.
2. Soit $t \in [a, b]$. On pose $\alpha = \frac{f(t) - f(b)}{g(t) - g(b)}$ et on considère la fonction :

$$h : \begin{cases} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - \alpha g(x) \end{cases}$$

Montrer qu'il existe $c_t \in]t, b[$ tel :

$$\frac{f(t) - f(b)}{g(t) - g(b)} = \frac{f'(c_t)}{g'(c_t)}$$

3. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow b^-} \ell$. Montrer alors que :

$$\frac{f(t) - f(b)}{g(t) - g(b)} \xrightarrow{t \rightarrow b^-} \ell$$

4. *Application* : déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cos(x) - e^x}{(x+1)e^x - 1}$.

4 Dérivabilité d'une fonction réciproque

Exercice 15 (fonction Argh) 1. Justifier que la fonction th induit une application bijective de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer.

2. Déterminer l'application réciproque de cette bijection. *Cette réciproque est notée Argh et est appelée fonction argument tangente hyperbolique.*
3. En utilisant deux méthodes différentes, étudier la dérivabilité de la fonction Argh et calculer sa dérivée.

Exercice 16 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ par :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Que peut-on dire de f^{-1} ? Donner sur le même graphique l'allure des courbes représentatives de f et de f^{-1} .
3. Justifier que :

$$\forall x \in J, \quad \cos(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \sin(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}$$

4. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$ et que :

$$\forall x \in J \setminus \{1\}, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

5 Suites récurrentes

Exercice 17 On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{2x}{\ln(x) + 1}$ sur $[1, +\infty[$.

1. Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

3. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - e| \leq \frac{e-1}{2^n}$$

4. Que peut-on conclure?

Exercice 18 Soit $u_0 \in [0, 1]$. On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n} + 1}$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0, 1]$.

2. Montrer qu'il existe un unique nombre réel α tel que $\frac{e^\alpha}{e^\alpha + 1} = \alpha$, et que $\alpha \in [0, 1]$.
3. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

- (b) Déterminer à la main un rang n explicite pour lequel u_n est une approximation de α à 10^{-5} près.

6 Limite de la dérivée

Exercice 19 Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2 \ln(x)$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 20 1. Déterminer la dérivée de $f : x \mapsto \ln(|x|)$ sur $\mathbb{R}^*$.

2. Pour quelle valeur maximale de $k \in \mathbb{N}$ la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} x^3 \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est-elle de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 21 Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = g(x^2)$$