

# DÉNOMBREMENT

(quelques corrigés)

## Exercice 1

1. Une main de 5 cartes peut être interprétée comme une 5-combinaison de l'ensemble des 32 cartes. Le nombre de mains possibles est donc  $\binom{32}{5}$ .

**Remarque :** l'ordre des cartes n'est pas important.

2. Une disposition des cartes après avoir été mélangées peut être interprétée comme une permutation de l'ensemble des cartes du jeu (*i.e.* un 32-arrangement de l'ensemble des cartes). Le nombre de façons de mélanger les cartes est donc 32!.
3. (a) Une poignée de 4 jetons est assimilée à un 4-arrangement de l'ensemble des 26 jetons. Le nombre de mots possibles est donc  $\frac{26!}{22!}$ .
- Remarque :** l'ordre des jetons est ici important (en échangeant certaines lettres, on change le mot).
- (b) Un mot est ici assimilé à une 4-liste de l'ensemble des 26 jetons. L'ensemble des mots est donc  $\{A, B, \dots, Z\}^4$  et donc le nombre de mots est  $26^4$ .
- (c) Comme les lettres sont rangées dans l'ordre alphabétique après tirage, l'ordre dans lequel les jetons arrivent n'a pas d'importance; on peut donc considérer que les jetons sont tirés simultanément. Un tirage est donc une 4-combinaison de l'ensemble des 26 jetons; le nombre de mots possibles est donc  $\binom{26}{4}$ .
4. L'ensemble des plaques minéralogiques est :

$$\mathcal{A}^2 \times \llbracket 0, 9 \rrbracket^2 \times \mathcal{A}^2,$$

en notant  $\mathcal{A} = \{A, B, \dots, Z\}$  l'ensemble des lettres de l'alphabet. Le nombre de plaques possibles est donc  $26^2 \times 10^3 \times 26^2$ .

5. Une issue de ce jeu peut être assimilée à un élément de  $\{\text{pile}, \text{face}\}^4$  (une issue est un quadruplet  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  où  $x_i$  est soit pile, soit face). Le nombre de parties possibles est donc  $2^4 = 16$ .
6. Si toutes les lettres du mot étaient différentes, le nombre d'anagrammes possibles est 6!. Or on a compté plusieurs fois les mêmes anagrammes, autant de fois qu'il y a de permutations possibles des deux lettres P (soit 2!). Le nombre d'anagrammes cherché est donc  $\frac{6!}{2!} = 360$ .

7. Notons les quatre objets  $O_1, O_2, O_3$  et  $O_4$ . Un rangement de ces objets dans les trois tiroirs notés  $T_1, T_2$  et  $T_3$  peut être assimilé à un quadruplet  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  où, pour tout  $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ ,  $x_i$  est le tiroir choisi pour ranger l'objet  $O_i$ , *i.e.*  $O_i \in \{T_1, T_2, T_3\}$ . L'ensemble des rangements est donc  $\{T_1, T_2, T_3\}^4$ . On en dénombre  $3^4 = 81$ .
8. On peut assimiler une disposition à un quadruplet  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  où pour tout  $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ ,  $x_i$  est la chaise  $(C_1, \dots, C_6)$  choisie par la  $i^{\text{e}}$  personne, les chaises étant nécessairement distinctes. Ainsi, une disposition est un 4-arrangement de l'ensemble des 6 chaises. Le nombre de dispositions est donc  $\frac{6!}{2!}$ .
9. Une grille remplie est assimilée à une 5-combinaison de l'ensemble de 49 jetons. On en dénombre  $\binom{49}{5}$ .
10. On peut assimiler une disposition des dix enfants à une 10-liste de l'ensemble des 4 pièces (chaque entrée de la 10-liste est la pièce choisie par un enfant). Le nombre de dispositions possibles est donc  $4^{10}$ .

## Exercice 2

1. Un élément de  $A$  peut être assimilée à une 6-liste de l'ensemble  $\llbracket 1, 9 \rrbracket$ . Avec cette identification, on a l'égalité  $A = \llbracket 1, 9 \rrbracket^6$  et  $|A| = 9^6$ .
2. Un élément de  $A_1$  est un 6-arrangement de l'ensemble  $\llbracket 1, 9 \rrbracket$ . On a donc  $|A_1| = \frac{9!}{3!}$ .
3. Un élément de  $A$  est pair si et seulement si son chiffre des unités appartient à  $\{2, 4, 6, 8\}$ . Ainsi,  $A_1 = \llbracket 1, 9 \rrbracket^5 \times \{2, 4, 6, 8\}$  et  $|A_1| = 9^5 \times 4$ .
4. Un élément de  $A_3$  peut être interprété comme une 6-combinaison de l'ensemble  $\llbracket 1, 9 \rrbracket$  (l'ordre n'est pas important puisque les chiffres sont rangés dans l'ordre croissant) donc  $|A_3| = \binom{9}{6}$ .

## Exercice 3

1. Une disposition des billes peut être assimilée à une permutation de l'ensemble des 10 billes. Il y a donc 10! façons de les ranger.
2. (a) Pour ordonner les 10 billes :
- ★ on choisit les emplacements des billes rouges, ce qui revient à choisir les emplacements de ces billes parmi les 10 emplacements :  $\binom{10}{5}$  choix;

★ on choisit les emplacements des billes blanches parmi les places vacantes :  $\binom{5}{2}$  choix ;

★ on choisit les emplacements des billes vertes :  $\binom{3}{3} = 1$  choix.

Le nombre de façons de ranger les billes est donc  $\binom{10}{5} \binom{5}{2}$ .

(b) Si on veut regrouper les billes par couleur, il suffit de choisir l'ordre des couleurs. Il y a donc  $3! = 6$  façons de ranger les billes.

(c) Pour obtenir une disposition des billes :

★ on choisit l'emplacement de la première bille rouge : 6 choix (la première bille rouge peut être de la position 1 à la position 6, et les autres billes rouges sont à la suite) ;

★ on choisit les emplacements des billes blanches parmi les emplacements vacants :  $\binom{5}{2}$  choix ;

★ on choisit les emplacements des billes vertes :  $\binom{3}{3} = 1$  choix.

Le nombre de dispositions est donc  $6 \binom{5}{2}$ .

#### Exercice 4

1. Une main est une 13-combinaison de l'ensemble des 52 cartes. Le nombre de mains possibles est donc  $\binom{52}{13}$ .

2. On note  $A$  l'ensemble des mains contenant au moins un pique. Alors  $\bar{A}$  est l'ensemble des mains ne contenant aucun pique. Un élément de  $\bar{A}$  est donc une 13-combinaison de l'ensemble des cartes de trèfle, cœur et carreau du jeu. Ainsi,  $|\bar{A}| = \binom{39}{13}$ . On en déduit que :

$$|A| = \binom{52}{13} - |\bar{A}| = \binom{52}{13} - \binom{39}{13}$$

3. On note  $B$  l'ensemble des mains contenant au plus un pique. Alors  $B = B_0 \sqcup B_1$ , où :

—  $B_0$  est l'ensemble des mains ne contenant aucun pique (on a donc  $B_0 = \bar{A}$ ) ;

— et  $B_1$  est l'ensemble des mains contenant exactement un pique.

Pour obtenir un élément de  $B_1$ , on doit :

★ choisir un pique : 13 choix ;

★ choisir 12 autres cartes, ce qui revient à choisir une 12-combinaison de l'ensemble des cartes de trèfle, cœur et carreau du jeu.

Ainsi,  $|B_1| = 13 \binom{39}{12}$  et donc :

$$|B| = |B_0| + |B_1| = \binom{39}{13} + 13 \binom{39}{12}$$

4. On note :

—  $C$  l'ensemble des mains contenant exactement un as et deux piques ;

—  $C_1$  l'ensemble des éléments de  $C$  constitué de l'as de pique ;

—  $C_2$  l'ensemble des éléments de  $C$  pour lesquels l'(unique) as choisi est l'as de trèfle, de carreau ou de cœur.

On a alors l'égalité  $C = C_1 \sqcup C_2$ . Dénombrons les ensembles  $C_1$  et  $C_2$ .

Pour obtenir un élément de  $C_1$  :

★ on choisit l'as de pique : 1 choix ;

★ on choisit un autre pique : 12 choix ;

★ on choisit encore 11 cartes parmi les trèfles, carreaux et cœurs auxquelles on a enlevé les as (ce qui représente  $39 - 3 = 36$  cartes) :  $\binom{36}{11}$  choix ;

Par conséquent,  $|C_1| = 12 \binom{36}{11}$ .

Pour obtenir un élément de  $C_2$  :

★ on choisit un as (trèfle, carreau ou cœur) : 3 choix ;

★ on choisit deux piques (pas l'as) :  $\binom{12}{2}$  choix ;

★ on choisit encore 10 cartes :  $\binom{36}{10}$  choix.

Ainsi,  $|C_2| = 3 \binom{12}{2} \binom{36}{10}$ . Finalement :

$$|C| = |C_1| + |C_2| = 12 \binom{36}{11} + 3 \binom{12}{2} \binom{36}{10}$$

#### Exercice 5

1. Une disposition des livres sur l'étagère est une permutation de l'ensemble des 9 livres donc le nombre de rangements possibles est  $9!$ .

2. On note  $\Omega$  l'ensemble des rangements possibles et  $A$  l'événement : « les livres sont regroupés par matière ». Par équiprobabilité, on a  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ . Pour regrouper les livres par matière :

- ★ on choisit l'ordre des trois matières :  $3!$  choix ;
- ★ on choisit dans quel ordre sont placés les livres de biologie :  $3!$  choix ;
- ★ on choisit l'ordre des livres de chimie :  $4!$  choix ;
- ★ on choisit l'ordre des livres de maths :  $2!$  choix.

On en déduit que :

$$|A| = (3!)^2 \times 4! \times 2! \quad \text{et} \quad P(A) = \frac{(3!)^2 \times 4! \times 2!}{9!}$$

3. On note  $\Omega$  l'ensemble des 2-combinaisons de l'ensemble des 9 livres ; on a  $|\Omega| = \binom{9}{2}$ .

Soit encore  $A$  l'événement « les deux livres choisis sont de la même matière ». Par équiprobabilité, on a  $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ . Il reste à dénombrer l'ensemble  $A$ . On remarque que l'on peut écrire :

$$A = B \sqcup C \sqcup M$$

où  $B$  est l'événement « les deux livres choisis sont des livres de biologie » (idem pour  $C$  et  $M$  pour la chimie et les maths). On a :

$$|B| = \binom{3}{2}, \quad |C| = \binom{4}{2} \quad \text{et} \quad |M| = \binom{2}{2} = 1$$

On conclut avec  $|A| = |B| + |C| + |M|$ .