

DÉNOMBREMENT

1 Dénombrements

Exercice 1 Répondre à chaque question après avoir identifié de quel type de dénombrement il s'agit.

- Combien de mains de 5 cartes peut-on former avec un jeu de 32 cartes ?
- De combien de façons peut-on mélanger un jeu de 32 cartes ?
- Un sac contient 26 jetons sur lesquels sont écrites les lettres de l'alphabet.
 - On tire une poignée de 4 jetons que l'on aligne pour former un mot de 4 lettres. Combien de mots sont possibles ?
 - On tire un jeton, on note la lettre obtenue, on remet le jeton et on répète l'opération 4 fois. Combien de mots de 4 lettres peut-on obtenir ?
 - On tire une poignée de 4 lettres que l'on aligne dans l'ordre alphabétique. Combien de mots obtient-on ?
- Une plaque minéralogique est composée de 2 lettres, 3 chiffres puis 2 lettres. Combien de plaques différentes sont possibles ?
- On joue 4 fois de suite à pile ou face. Combien de parties sont possibles ?
- Combien existe-il d'anagrammes du mot PEPITO ?
- De combien de façons peut-on ranger 4 objets dans 3 tiroirs ?
- De combien de façons peut-on disposer 4 personnes sur 6 chaises (avec au plus une personne par chaise) ?
- Une grille de loto comporte 49 numéros et on doit en cocher 5. Combien de grilles sont possibles ?
- Dix enfants jouent à cache cache dans une maison de 4 pièces. De combien de manière peuvent-ils se répartir dans les 4 pièces ?

Exercice 2 Soit A l'ensemble des nombres à six chiffres ne comportant aucun zéro. Déterminer les cardinaux des ensembles suivants :

- A ;
- A_1 , ensemble des nombres de A ayant 6 chiffres différents ;
- A_2 , ensemble des nombres pairs de A ;
- A_3 , ensemble des nombres de A dont les chiffres forment une suite strictement croissante (dans l'ordre dans lequel ils sont écrits).

Exercice 3 On dispose de 10 billes que l'on veut placer sur une même rangée.

- On suppose que les 10 billes sont de couleurs différentes. De combien de façons peut-on les ranger ?
- On suppose qu'il y a 5 billes rouges, 2 blanches et 3 vertes et que l'on ne peut pas discerner les billes d'une même couleur.
 - De combien de façons peut-on les ranger ?
 - De combien de façons peut-on les ranger si l'on veut que les billes soient groupées par couleurs ?
 - Même question mais seules les rouges sont groupées.

Exercice 4 On appelle main tout ensemble de 13 cartes prises dans un jeu de 52 cartes.

- Combien y a-t-il de mains différentes ?
- Combien y a-t-il de mains différentes contenant au moins un pique ?
- Combien y a-t-il de mains différentes contenant au plus un pique ?
- Combien y a-t-il de mains différentes contenant exactement un as et deux piques ?

Exercice 5 On considère 9 livres différents comportant 3 livres de biologie, 4 de chimie et 2 de maths.

- De combien de façon peut-on ranger les 9 livres sur l'étagère ?
- Quelle est la probabilité que les livres soient regroupés par matière sur l'étagère ?
- On prend deux livres au hasard sur l'étagère. Quelle est la probabilité qu'ils soient tous les deux de la même matière ?

Exercice 6 Une urne contient cinq boules noires numérotées de 1 à 5, quatre boules rouges numérotées de 6 à 9 et deux boules blanches numérotées 10 et 11. On prélève successivement et sans remise trois boules dans l'urne. Combien y a-t-il de résultats :

- au total ?
- comportant trois boules rouges ?
- comportant au moins une boule rouge ?
- comportant une boule rouge, puis une noire, puis une blanche ?
- comportant trois boules de trois couleurs différentes ?
- comportant une blanche et deux noires ?
- dans lesquels le plus grand des numéros obtenus est le troisième ?

2 Abstrait

Exercice 7 Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \llbracket 1, a + b \rrbracket$. On considère un ensemble de jetons formé de a jetons jaunes et b jetons verts. On en pioche n simultanément.

- Comment formaliser un tirage ? Combien de tirages différents peut-on obtenir ?
- Soit $k \in \llbracket 0, a \rrbracket$. Combien de tirages différents peut-on obtenir si on veut prendre exactement k jetons jaunes ?
- En déduire la *formule de Vandermonde* :

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} \binom{b}{n-k}$$

Exercice 8 Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes :

$$S = \sum_{X \in \mathcal{P}(E)} |X|, \quad T = \sum_{(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2} |X \cap Y|$$

$$\text{et } U = \sum_{(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2} |X \cup Y|.$$

Exercice 9 (nombre de couples de parties incluses l'une dans l'autre) Soit E un ensemble fini de cardinal n et soit $A = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid Y \subset X\}$.

- Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $A_k = \{(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid Y \subset X \text{ et } |X| = k\}$. Calculer $|A_k|$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- Déduire des deux questions précédentes la valeur de $|A|$.

Exercice 10 1. Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x + y = p$.

2. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on note Σ_n^p le nombre de n -uplets $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $x_1 + \dots + x_n = p$.

- Déterminer $\Sigma_n^0, \Sigma_n^1, \Sigma_n^2, \Sigma_1^p$ et Σ_2^p .
- Établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, \quad \Sigma_{n+1}^p = \Sigma_n^0 + \Sigma_n^1 + \dots + \Sigma_n^p$$

- En déduit que $\Sigma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$.

Exercice 11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. **Surjections :**

- Combien y a-t-il de surjections de l'ensemble $\llbracket 0, n \rrbracket$ dans l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$?
- Combien y a-t-il de surjections de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans l'ensemble $\{0, 1\}$ (*Indication* : dénombrer le complémentaire de l'ensemble des bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\{0, 1\}$).

2. **Bijections :**

- Combien y a-t-il de bijections φ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$?
- On choisit un élément $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Combien y a-t-il de bijections φ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ telles que $\varphi(k) = k$?

3. **Applications strictement monotones :**

- Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $\llbracket 1, k \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ pour $k < n$?
- Même question pour les applications strictement décroissantes.

Exercice 12 On considère un ensemble E de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à dénombrer l'ensemble des couples (A, B) de sous-ensembles de E vérifiant $A \cap B = \emptyset$.

- Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Combien y a-t-il de parties à k éléments de E ?
- Soit A un sous-ensemble fixé de E de cardinal $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Combien y a-t-il de parties B de E telles que $A \cap B = \emptyset$?
- Conclure.

Exercice 13 Soient E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{P}(E)$. On pose $p = |A|$.

- Combien y a-t-il de parties X de E contenant A ?
- Soit $m \in \llbracket p, n \rrbracket$. Combien y a-t-il de parties X de E de cardinal m contenant A ?
- Combien y a-t-il de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \cap Y = A$?

Exercice 14 (nombre de surjections) Soient E et F deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On note S_n^p le nombre de surjections de E sur F . Par convention, on pose $S_n^0 = 0$.

- Donner les valeurs de $S_n^1, S_n^n, S_1^p, S_n^{n-1}$ et S_n^p pour $p > n$.
- (a) On fixe un élément a de E . Établir l'égalité :

$$S_n^p = p \left(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p \right)$$

- En déduire que $S_n^p = \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n$.