

FONCTIONS CONVEXES

(corrigés)

Exercice 1 Montrons que :

$$\forall \lambda \in [0, 1], \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad c(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda c(x) + (1 - \lambda)c(y)$$

Soient $\lambda \in [0, 1]$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Posons $d(\lambda, x, y) = \lambda c(x) + (1 - \lambda)c(y) - c(\lambda x + (1 - \lambda)y)$. On doit montrer que $d(\lambda, x, y) \geq 0$. On a :

$$\begin{aligned} d(\lambda, x, y) &= \lambda x^2 + (1 - \lambda)y^2 - (\lambda x + (1 - \lambda)y)^2 \\ &= \lambda x^2 + (1 - \lambda)y^2 - \lambda^2 x^2 - 2\lambda(1 - \lambda)xy - (1 - \lambda)^2 y^2 \\ &= (\lambda - \lambda^2)x^2 - 2\lambda(1 - \lambda)xy + ((1 - \lambda) - (1 - \lambda)^2)y^2 \\ &= \lambda(1 - \lambda)x^2 - 2\lambda(1 - \lambda)xy + \lambda(1 - \lambda)y^2 \\ &= \lambda(1 - \lambda)(x^2 - 2xy + y^2) \\ &= \lambda(1 - \lambda)(x - y)^2 \end{aligned}$$

Or $(x - y)^2 \geq 0$, $\lambda \geq 0$ et $1 - \lambda \geq 0$ car $\lambda \in [0, 1]$. On en déduit que $d(\lambda, x, y) \geq 0$. Ainsi :

la fonction $c : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$

Exercice 12

1. Soient x_1, x_2, x_3 trois éléments de $]a, b[$ tels que $x_1 < x_2 < x_3$.

★ Soit $x \in]a, x_2[$. D'après les inégalités des pentes, on a :

$$\frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

En multipliant par $x - x_2 < 0$ et en ajoutant $f(x_2)$, on obtient :

$$f(x) \geq f(x_2) + \lambda(x - x_2) \quad \text{en posant} \quad \lambda = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

Or la fonction (affine) $g : x \mapsto f(x_2) + \lambda(x - x_2)$ est minorée sur $]a, b[$ (elle est même bornée). Plus précisément :

$$\forall x \in]a, x_2[, \quad g(x) \geq \begin{cases} f(x_2) & \text{si } \lambda \geq 0 \\ f(x_2) + \lambda(b - x_2) & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

On en déduit que la fonction f est minorée sur l'intervalle $]a, x_2[$.

★ Soit $x \in]x_2, b[$. D'après les inégalités des pentes, on a :

$$\frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

puis, en multipliant par $x - x_2 > 0$ et en ajoutant $f(x_2)$, on obtient :

$$\forall x \in]x_2, b[, \quad f(x) \geq f(x_2) + (x - x_2) \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Comme au point précédent, la fonction (affine) $x \mapsto f(x_2) + (x - x_2) \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ est minorée sur $]x_2, b[$ donc la fonction f l'est également.

Finalement :

la fonction f est minorée sur l'intervalle $]a, b[$

2. La fonction inverse est convexe sur $]0, 1[$ (en effet, cette fonction est deux fois dérivable sur cet intervalle et sa dérivée seconde est la fonction $x \mapsto \frac{2}{x^3}$ qui est positive sur $]0, 1[$) mais elle n'est pas majorée car $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$. Ainsi :

on ne peut pas conclure de la même manière que la fonction f est majorée sur $]a, b[$

Exercice 13 (convexité et régularité)

1. Soit $a \in \overset{\circ}{I}$. Comme f est convexe sur I , la fonction :

$$\tau_a : \begin{cases} I \setminus \{a\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{cases}$$

est croissante sur $I \setminus \{a\}$. Comme a n'est pas une extrémité de I , il existe $b \in I$ tel que $a < b$. Par conséquent, la fonction :

$$\tau_a^- : \begin{cases} I \cap]-\infty, a[& \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{cases}$$

est croissante et majorée par $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. D'après le théorème de la limite monotone, la fonction τ_a^- admet une limite finie à gauche en a . Autrement dit, la fonction f est dérivable à gauche au point a . On montre de manière analogue que f est dérivable à droite en a .

Il reste à démontrer l'inégalité $f'_g(a) \leq f'_d(a)$. Soit $y \in I \cap]a, +\infty[$. Par croissance de la fonction τ_a sur $I \setminus \{a\}$, on a :

$$\forall x \in I \cap]-\infty, a[, \quad \tau_a(x) \leq \tau_a(y)$$

En faisant tendre x vers a^- , on obtient $f'_g(a) \leq \tau_a(y)$. Ainsi :

$$\forall y \in I \cap]a, +\infty[, \quad f'_g(a) \leq \tau_a(y)$$

En faisant tendre y vers a^+ , on obtient $f'_g(a) \leq f'_d(a)$. Ainsi :

$$\boxed{f \text{ est dérivable à gauche et à droite en } a \text{ et } f'_g(a) \leq f'_d(a)}$$

2. Soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$. Il existe $a, b \in I$ tels que $a < x_0 < b$. Montrons que f est continue en x_0 en montrant que :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^-} f(x_0) \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^+} f(x_0)$$

★ **Limite à gauche en x_0**

Soit $x \in]a, x_0[$. La fonction f est convexe sur I donc, d'après les inégalités des pentes, on a :

$$\frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0}$$

En multipliant par $x - x_0 < 0$, on obtient :

$$(x - x_0) \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} \leq f(x) - f(x_0) \leq (x - x_0) \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0}$$

Or :

$$(x - x_0) \frac{f(b) - f(x_0)}{b - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0^-} 0 \quad \text{et} \quad (x - x_0) \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0^-} 0$$

donc, d'après le théorème des gendarmes, on a $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0^-} f(x_0)$.

★ **Limite à droite en x_0**

On procède de la même manière en partant cette fois de $x \in]x_0, b[$.

La fonction f est donc continue en x_0 . Finalement :

$$\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue sur } \overset{\circ}{I}}$$

Exercice 14

1. On suppose que f est convexe et majorée sur $\mathbb{R}$. Raisonnons par l'absurde en supposant que f ne soit pas constante sur $\mathbb{R}$. Il existe alors $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f(a) \neq f(b)$. On a ou bien $f(a) < f(b)$ ou bien $f(a) > f(b)$. On distingue donc deux cas.

★ **Premier cas : $f(a) < f(b)$**

Comme f est convexe, on a d'après les inégalités des pentes :

$$\forall x \in]b, +\infty[, \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

On en déduit, en multipliant par $x - a > 0$ et en ajoutant $f(a)$:

$$\forall x \in]b, +\infty[, \quad f(x) \geq f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Or $f(b) > f(a)$ et $b > a$ donc $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$. On en déduit que $f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Le théorème de comparaison implique donc que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, ce qui contredit le fait que f soit majorée sur $\mathbb{R}$.

★ **Deuxième cas : $f(a) > f(b)$**

D'après les inégalités des pentes, on a :

$$\forall x \in]-\infty, a[, \quad \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \leq \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

et donc, en multipliant par $x - b < 0$ et en ajoutant $f(b)$:

$$\forall x \in]-\infty, a[, \quad f(x) \geq f(b) + (x - b) \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

On a ici $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} < 0$ donc $f(x) \geq f(b) + (x - b) \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$. D'après le théorème de comparaison, on a aussi $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$, ce qui contredit à nouveau le fait que f soit majorée sur $\mathbb{R}$.

Finalement, f est constante sur $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{si } f \text{ est convexe et majorée sur } \mathbb{R}, \text{ alors } f \text{ est constante sur } \mathbb{R}}$$

2. La fonction $f : x \mapsto e^{-x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$ (car elle y est deux fois dérivable, de dérivée seconde $x \mapsto e^{-x}$ qui est une fonction positive). La fonction f est de plus non constante et majorée par 1 sur $\mathbb{R}_+$. Donc :

une fonction convexe sur $\mathbb{R}_+$ peut être majorée et non constante

Exercice 16 Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ une fonction croissante sur $\mathbb{R}$, convexe et non constante. Comme f n'est pas constante, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f(a) < f(b)$. D'après l'inégalité des pentes, on a :

$$\forall x \in]b, +\infty[, \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

i.e. :

$$\forall x \in]b, +\infty[, \quad f(x) \geq f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Or $f(x) \geq f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ car $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$ donc, d'après le théorème de comparaison, on a aussi :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$