Fonctions convexes

1 Inégalités de convexité

Exercice 1 Montrer que la fonction $c : x \longmapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ en utilisant la définition de la convexité.

Exercice 2 Justifier que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^{\frac{a+b}{2}} \leqslant \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{a} + \mathrm{e}^{b})$$

Exercice 3 Montrer que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \frac{2}{\pi}x \leqslant \sin(x) \leqslant x$$

Exercice 4

1. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto \ln(\ln(x))$ est concave sur $]1, +\infty[$.
2. Soient $x_1, x_2 \in]1, +\infty[$. Justifier que :

$$\ln\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(x_1)\ln(x_2)}$$

Exercice 5 (inégalité de Hölder) Soient p et q des nombres réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. En utilisant la concavité de la fonction ln, montrer que pour tous $x, y \in]0, +\infty[$, on a :

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in]0, +\infty[$.
   (a) On suppose que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^p = \sum_{i=1}^{n} b_i^q = 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant 1$.
   (b) En déduire que :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$

Exercice 6 (inégalité arithmético-géométrique) Soient n un entier naturel non nul, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. En utilisant la concavité de la fonction ln, montrer que :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Exercice 7

1. Étudier la convexité de la fonction $f : x \longmapsto \ln(1 + \mathrm{e}^{x})$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que :

$$\forall x, y \in]0, +\infty[, \qquad 1 + \sqrt{xy} \leqslant \sqrt{1+x}\sqrt{1+y}$$

3. Plus généralement, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x_1, \dots, x_n \in]0, +\infty[, \qquad 1 + \left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leqslant \prod_{k=1}^{n} (1 + x_k)^{1/n}$$

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in]0, +\infty[, \ \left(\prod_{k=1}^{n} (a_k + b_k)\right)^{1/n} \geqslant \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{1/n}$$

Exercice 8 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que :

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leqslant \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Exercice 9

1. Étudier la convexité/concavité de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x} + 1}$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $x_1, \dots, x_n \in [1, +\infty[$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + x_k} \geqslant \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}$$

2 Résultats qualitatifs

Exercice 10 Soient f et g deux fonctions convexes sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f est croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f \circ g$ est convexe.
2. La fonction $f \circ g$ est-elle convexe si on enlève l'hypothèse de croissance de la fonction f ?

Exercice 11 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in (\mathbb{R}_+^*)^I$. On dit que est *logarithmiquement convexe* si la fonction $\ln \circ f$ est convexe.

1. Montrer que, si f est logarithmiquement convexe sur I, alors f est convexe.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 12 Soit f une fonction convexe sur un intervalle borné $]a, b[$ où $a < b$.

1. Montrer que f est minorée.
2. La fonction f est-elle nécessairement majorée ?

Exercice 13 Soient f une fonction convexe sur un intervalle I et a un point de I qui n'est pas une extrémité de I.

1. Montrer que f est dérivable à droite et à gauche au point a et que :
$$f'_g(a) \leqslant f'_d(a)$$
2. Montrer que f est continue en tout point de I qui n'est pas une extrémité de I.

Exercice 14
1. Soit f une fonction convexe majorée sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.
2. Le résultat est-il conservé si f est convexe sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 15 Soient I et J deux intervalles d'intérieurs non vides et $f \in J^I$ une fonction bijective, convexe et strictement monotone sur I. Que peut-on dire de la fonction f^{-1} ?

Exercice 16 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante non constante. Montrer que :
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$