

FONCTIONS CONVEXES

1 Inégalités de convexité

Exercice 1 Montrer que la fonction $c : x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$ en utilisant la définition de la convexité.

Exercice 2 Justifier que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad e^{\frac{a+b}{2}} \leq \frac{1}{2}(e^a + e^b)$$

Exercice 3 Montrer que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$$

Exercice 4 1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$ est concave sur $]1, +\infty[$.
2. Soient $x_1, x_2 \in]1, +\infty[$. Justifier que :

$$\ln\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x_1)\ln(x_2)}$$

Exercice 5 (inégalité de Hölder) Soient p et q des nombres réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. En utilisant la concavité de la fonction $\ln$, montrer que pour tous $x, y \in]0, +\infty[$, on a :

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in]0, +\infty[$.

(a) Dans cette question uniquement, on suppose que $\sum_{i=1}^n a_i^p = \sum_{i=1}^n b_i^q = 1$. Montrer

$$\text{que } \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq 1.$$

(b) En déduire que :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}$$

Exercice 6 (inégalité arithmético-géométrique) Soient n un entier naturel non nul et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$.

1. En utilisant la concavité de la fonction $\ln$, montrer que :

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

2. Montrer que :

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

Exercice 7 1. Étudier la convexité de la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que :

$$\forall x, y \in]0, +\infty[, \quad 1 + \sqrt{xy} \leq \sqrt{1+x} \sqrt{1+y}$$

3. Plus généralement, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x_1, \dots, x_n \in]0, +\infty[, \quad 1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leq \prod_{k=1}^n (1 + x_k)^{1/n}$$

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in]0, +\infty[, \quad \left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k)\right)^{1/n} \geq \left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n}$$

Exercice 8 Soient $a, b \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et f une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Montrer que :

$$(b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Exercice 9 1. Étudier la convexité/concavité de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{e^x + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous $x_1, \dots, x_n \in [1, +\infty[$, on a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + x_k} \geq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}$$

2 Résultats qualitatifs

Exercice 10 Soient f et g deux fonctions convexes sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f est croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f \circ g$ est convexe.
2. La fonction $f \circ g$ est-elle convexe si on enlève l'hypothèse de croissance de la fonction f ?

Exercice 11 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in (\mathbb{R}_+^*)^I$. On dit que f est *logarithmiquement convexe* si la fonction $\ln \circ f$ est convexe.

1. Montrer que, si f est logarithmiquement convexe sur I , alors f est convexe.
2. La réciproque est-elle vraie?

Exercice 12 Soit f une fonction convexe sur un intervalle borné $]a, b[$ où $a < b$.

1. Montrer que f est minorée.
2. La fonction f est-elle nécessairement majorée?

Exercice 13 (convexité et régularité) Soient f une fonction convexe sur un intervalle I et a un point de I qui n'est pas une extrémité de I .

Les deux questions sont indépendantes.

1. Montrer que f est dérivable à droite et à gauche au point a et que :

$$f'_g(a) \leq f'_d(a)$$

2. Montrer que f est continue en tout point de I qui n'est pas une extrémité de I .

Exercice 14 1. Soit f une fonction convexe majorée sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

2. Le résultat est-il conservé si f est convexe sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 15 Soient I et J deux intervalles d'intérieurs non vides et $f \in J^I$ une fonction bijective, convexe et strictement monotone sur I . Que peut-on dire de la fonction f^{-1} ?

Exercice 16 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante non constante. Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$