Trigonométrie

I – Généralités : cosinus, sinus et tangente

Rappel (relation de congruence dans $\mathbb{R}$) : pour tous $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$,

$$x \equiv y\ [\alpha] \iff (\exists\, k \in \mathbb{Z},\ x = y + k\alpha)$$

Par exemple, $\dfrac{19\pi}{2} \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ car $\dfrac{19\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2} = 3\pi$.

Notation : Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on pose :

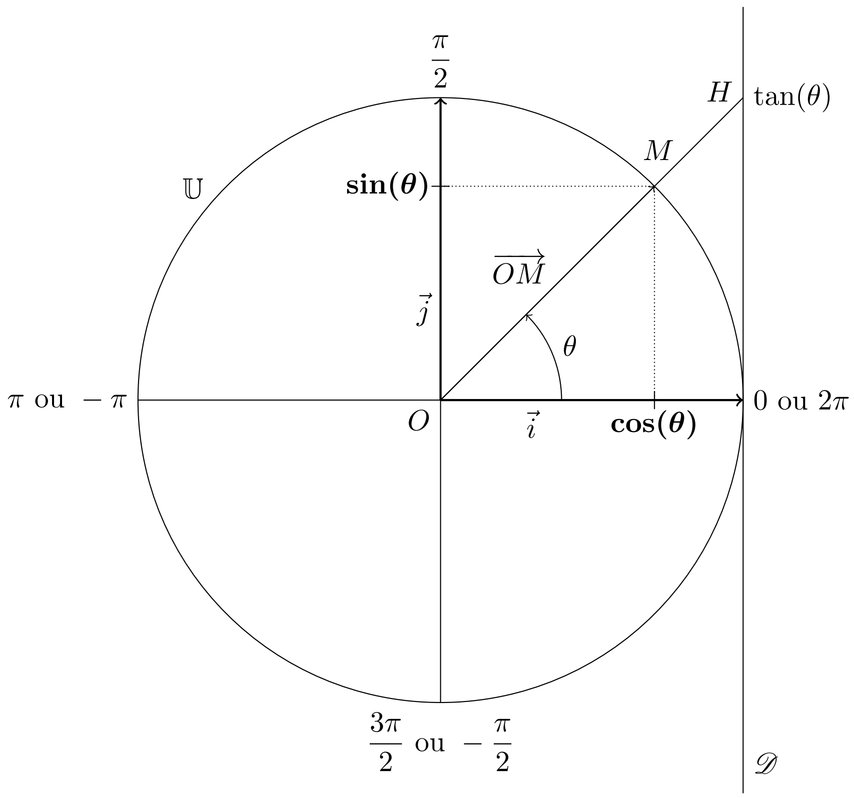
$$\alpha\mathbb{Z} + \beta = \left\{\alpha k + \beta \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Par exemple, l'ensemble des entiers relatifs impairs est $2\mathbb{Z} + 1$.

1) Le cercle trigonométrique

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan orienté dans le sens direct. Le cercle trigonométrique (identifié avec $\mathbb{U} = \left\{e^{i\theta} \,\middle|\, \theta \in \mathbb{R}\right\}$ dans le plan complexe) est le cercle de centre $O(0,0)$ et de rayon 1.

Tout point M du cercle trigonométrique est complètement déterminé par l'angle θ (défini à un multiple entier de 2π près) formé par les vecteurs $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OM}$.



Notation : l'abscisse du point M est notée $\cos(\theta)$, son ordonnée est notée $\sin(\theta)$.

Si $\cos(\theta) \neq 0$, *i.e.* si $\theta \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ (*i.e.* si $\theta \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$), alors on définit la tangente de l'angle θ par :

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

Remarque : l'ensemble de définition de la fonction $x \longmapsto \tan(x)$ est donc $\mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$.

Interprétation géométrique : traçons la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = 1$ (tangente au cercle $\mathbb{U}$ au point $A(1,0)$). Le théorème de Thalès appliqué dans le triangle OAH nous donne :

$$\frac{OA}{\cos(\theta)} = \frac{OH}{\sin(\theta)} \qquad \text{mais } OA = 1 \text{ donc} \qquad OH = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta)$$

On remarque que $\tan(\theta) = AH$ où H est l'intersection des droites (D) et (OM) (théorème de Thalès).

Premières observations :

- ⋆ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad -1 \leqslant \cos(\theta) \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad -1 \leqslant \sin(\theta) \leqslant 1$$

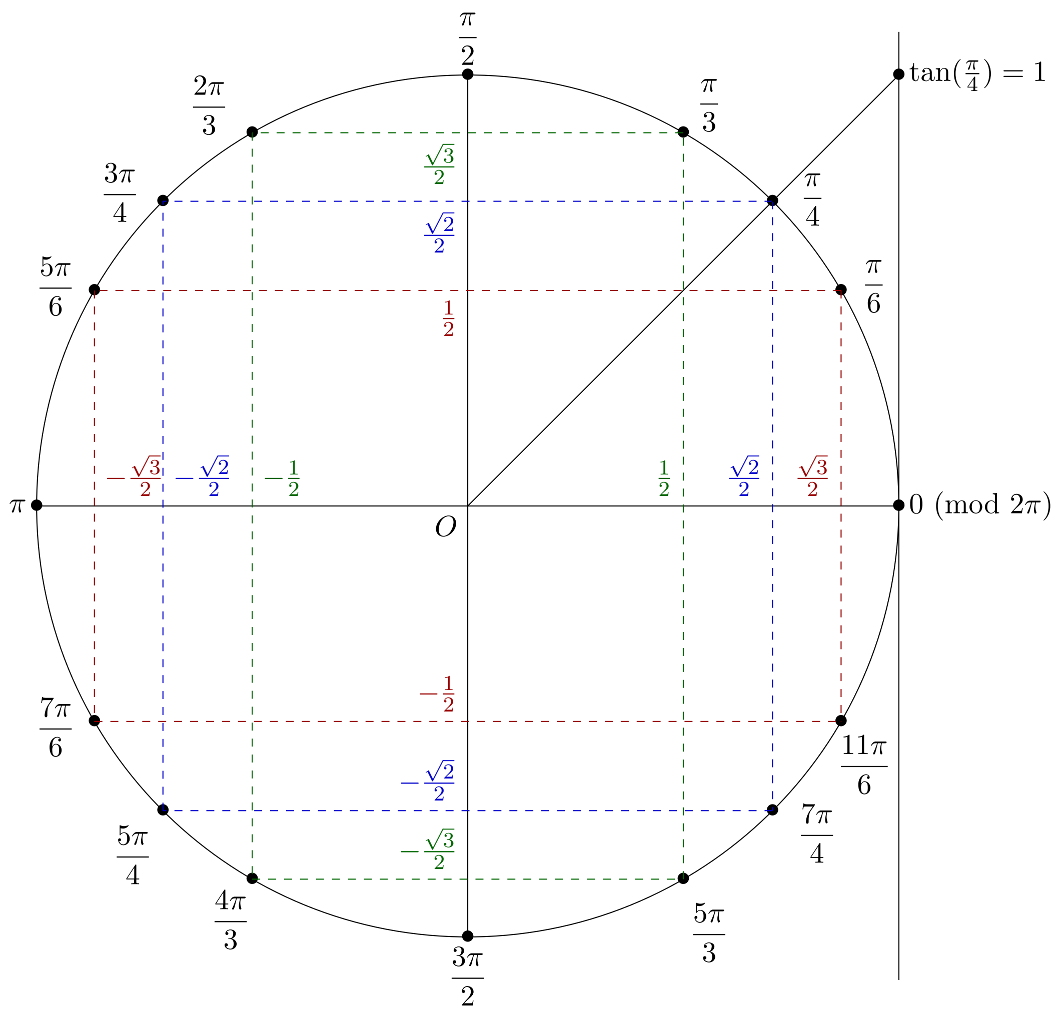
  Autrement dit :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad |\cos(\theta)| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad |\sin(\theta)| \leqslant 1$$

- ⋆ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a (d'après le théorème de Pythagore) :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1$$

Angle θ	**0**	$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$	$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$
cos(θ)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin(θ)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tan(θ)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non défini



2) Formules de symétrie

Une simple lecture du cercle trigonométrique permet de retrouver facilement les relations suivantes valables pour tout nombre réel θ (sauf mention contraire pour la tangente).

Périodicité :	$\cos(\theta+2\pi)=\cos(\theta)$	$\sin(\theta+2\pi)=\sin(\theta)$
	$\tan(\theta+\pi)=\tan(\theta)$	(pour $\theta\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$)
Relation entre cosinus et sinus :	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin(\theta)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos(\theta)$
	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin(\theta)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos(\theta)$
Cosinus :	$\cos(\pi-\theta)=-\cos(\theta)$	$\cos(\pi+\theta)=-\cos(\theta)$
	$\cos(-\theta)=\cos(\theta)$	
Sinus :	$\sin(\pi-\theta)=\sin(\theta)$	$\sin(\pi+\theta)=-\sin(\theta)$
	$\sin(-\theta)=-\sin(\theta)$	
Tangente :	$\tan(\theta)=\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$	(pour $\theta\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$)
	$1+\tan(\theta)^2=\dfrac{1}{\cos(\theta)^2}$	(pour $\theta\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$)
	$\tan(-\theta)=-\tan(\theta)$	(pour $\theta\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$)
	$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1}{\tan(\theta)}$	(pour $\theta\not\equiv 0\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$)

Démonstration pour la tangente ■

3) Équations et inéquations trigonométriques

Il faut savoir résoudre des équations (et inéquations) mettant en jeu des égalités de cosinus, sinus ou tangentes. La proposition suivante rappelle les différents critères d'égalité. Il ne faut pas les apprendre par cœur ! L'important est de savoir les retrouver en représentant le cercle trigonométrique. Le résultat suivant est donc immédiat par lecture graphique.

Proposition (équations trigonométriques) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

- ⋆ **Égalité de deux cosinus :**

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \cos(x)=\cos(\alpha)\iff (x\equiv\alpha\ [2\pi])\text{ ou }(x\equiv-\alpha\ [2\pi])$$

- ⋆ **Égalité de deux sinus :**

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \sin(x)=\sin(\alpha)\iff (x\equiv\alpha\ [2\pi])\text{ ou }(x\equiv\pi-\alpha\ [2\pi])$$

- ⋆ **Égalité de deux tangentes :** si $\alpha\not\equiv\dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, alors :

$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right),\qquad \tan(x)=\tan(\alpha)\iff x\equiv\alpha\ [\pi]$$

Démonstration utiliser le cercle trigonométrique ■

✎✎✎ **Exercice** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\cos(2x) = 0$
2. $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 1$
3. $\tan(2x) = \sqrt{3}$

Une solution. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de chacune des équations proposées.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :
$$\cos(2x) = 0 \iff 2x \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi] \iff x \equiv \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right]$$
donc :
$$\mathscr{S} = \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :
$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 1 \iff \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \iff \left(x+\frac{\pi}{3} \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]\right) \text{ ou } \left(x+\frac{\pi}{3} \equiv \frac{5\pi}{6}\,[2\pi]\right)$$
$$\iff \left(x \equiv -\frac{\pi}{6}\,[2\pi]\right) \text{ ou } \left(x \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]\right)$$
Donc :
$$\mathscr{S} = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}\right)$$
3. Le domaine de validité de l'équation est $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Pour tout $x \in \mathscr{D}$, on a :
$$\tan(2x) = \sqrt{3} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \iff 2x \equiv \frac{\pi}{3}\,[\pi] \iff x \equiv \frac{\pi}{6}\left[\frac{\pi}{2}\right]$$
Donc :
$$\mathscr{S} = \mathscr{D} \cap \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$$

On dispose d'un résultat analogue pour résoudre des inéquations trigonométriques.

Proposition ⋆ **Inégalités avec des cosinus :** pour tout $\alpha \in [0, \pi]$, on a :
$$\forall x \in [-\pi, \pi], \qquad \cos(x) \geqslant \cos(\alpha) \iff x \in [-\alpha, \alpha]$$

⋆ **Inégalités avec des sinus :** pour tout $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :
$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \qquad \sin(x) \geqslant \sin(\alpha) \iff x \in [\alpha, \pi - \alpha]$$

⋆ **Inégalités avec des tangentes :** pour tout $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :
$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \qquad \tan(x) \geqslant \tan(\alpha) \iff x \in \left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\alpha + \pi, \frac{3\pi}{2}\right[$$

Démonstration lecture graphique ■

✎✎✎ **Exercice**

1. On considère l'inéquation $2\cos(2x) + 1 > 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Résoudre cette inéquation dans $[-\pi, \pi]$.
   (b) Résoudre cette inéquation dans $\mathbb{R}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3\tan(x) \geqslant \sqrt{3}$.

4) Transformation de $a\cos(x)+b\sin(x)$ en $R\cos(x+\varphi)$

Proposition Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Il existe $R,\varphi\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad a\cos(x)+b\sin(x)=R\cos(x-\varphi)$$

Démonstration Soit $x\in\mathbb{R}$. On factorise par $|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}\neq 0$:

$$a\cos(x)+b\sin(x)=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(x)+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(x)\right)$$

Le point de coordonnées $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ appartient au cercle trigonométrique donc il existe $\varphi\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos(\varphi)\qquad\text{et}\qquad\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin(\varphi)$$

Donc :

$$a\cos(x)+b\sin(x)=A(\cos(\varphi)\cos(x)+\sin(\varphi)\sin(x))=A\cos(x-\varphi)$$ ∎

✎✎✎ **Exercice** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)=\sqrt{3}$.

Solution. On note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)&=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)-\frac{1}{2}\sin(x)\right)\\&=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(x)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin(x)\right)\\&=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)=\sqrt{3}&\iff\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\\&\iff\left\{\begin{array}{rcl}x+\frac{\pi}{6}&\equiv&\frac{\pi}{6}\,[2\pi]\\&\text{ou}&\\x+\frac{\pi}{6}&\equiv&-\frac{\pi}{6}\,[2\pi]\end{array}\right.\\&\iff\left\{\begin{array}{rcl}x&\equiv&0\,[2\pi]\\&\text{ou}&\\x&\equiv&-\frac{\pi}{3}\,[2\pi]\end{array}\right.\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\mathscr{S}=2\pi\mathbb{Z}\cup\left\{-\frac{\pi}{3}+k\frac{\pi}{2}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}=2\pi\mathbb{Z}\cup\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}\right)$$

5) Formules d'addition et de duplication

Il faut connaître les formules suivantes.

Proposition (formules d'addition et de duplication) ⋆ **Formules d'addition :** pour tous $a,b\in\mathbb{R}$, on a les égalités :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \qquad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

et si $a, b, a+b \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, alors :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \qquad \text{et} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

⋆ **Formules de duplication :** en particulier, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a) \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \cos(2a) &= 2\cos(a)^2 - 1 \\ &= 1 - 2\sin(a)^2 \\ &= \cos(a)^2 - \sin(a)^2 \end{aligned}$$

Démonstration Les formules de duplication découlent directement des formules d'addition et de la relation fondamentale $\cos^2 + \sin^2 = 1$. De même, les formules d'addition de la tangente découlent des formules d'addition du cosinus et du sinus. Démontrons la formule d'addition du cosinus. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note A et B les points du cercle trigonométriques de coordonnées respectives $(\cos(a), \sin(a))$ et $(\cos(b), \sin(b))$. On sait, par définition du produit scalaire de deux vecteurs que (en notant O le point de coordonnées $(0, 0)$) :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

D'autre part, on peut exprimer le produit scolaire à l'aide des normes des vecteurs mis en jeu et de l'angle formé par ces deux vecteurs :

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| \left\|\overrightarrow{OB}\right\| \cos\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \cos(a-b)$$

d'où le résultat. En remplaçant b par $-b$ dans la formule démontrée, on obtient la formule relative à $\cos(a+b)$. Pour le sinus, il suffit d'utiliser le fait que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Les formules d'addition donnent immédiatement les formules *de produits* suivantes (qu'il faut savoir retrouver) :

Corollaire (formules de produits) Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}, \qquad \sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$$

et :

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$$

Démonstration Pour la première formule par exemple, il suffit d'expliciter $\cos(a+b) + \cos(a-b)$ à l'aide de la formule d'addition du cosinus. ■

6) Fonctions circulaires cosinus et sinus

On considère les deux fonctions :

$$\cos : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad \sin : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \right.$$

On sait que ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$ (vu en classe de Terminale). On souhaite démontrer ce résultat.

Lemme ⋆ On a les inégalités :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad 0 < \sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x) \qquad (*)$$

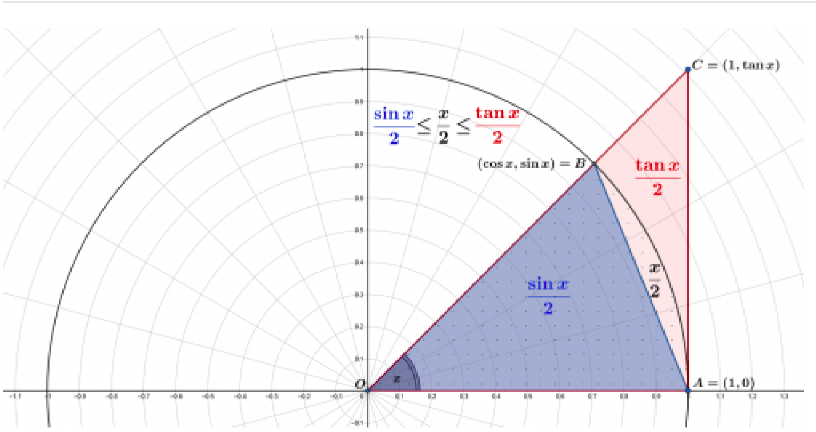
⋆ Ensuite :

$$\lim_{h \to 0} \sin(h) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{h \to 0} \cos(h) = 1,$$

⋆ Enfin :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Démonstration ⋆ Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.



- L'aire du triangle OAB est $\mathscr{A}_{OAB} = \dfrac{1 \times \sin(x)}{2} = \dfrac{\sin(x)}{2}$;
- l'aire de la portion de cercle est $\pi \times \dfrac{x}{2\pi} = \dfrac{x}{2}$;
- l'aide du triangle OAC est $\mathscr{A}_{OAC} = \dfrac{1 \times \tan(x)}{2} = \dfrac{\tan(x)}{2}$.

On a les inégalités :

$$\mathscr{A}_{OAB} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \mathscr{A}_{OAC}$$

donc les inégalités (**??**) sont démontrées.

⋆ Soit $h \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$. Comme $-h \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a d'après $(\star)$:

$$0 \leqslant \sin(-h) \leqslant -h \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad 0 \leqslant -\sin(h) \leqslant -h$$

par imparité de la fonction sin. En multipliant par $-1 \leqslant 0$, il vient :

$$\forall h \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[, \qquad h \leqslant \sin(h) \leqslant 0 \qquad (\star\star)$$

D'après le théorème des gendarmes et $(\star)$ et $(\star\star)$, on a :

$$\lim_{h \to 0^+} \sin(h) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{h \to 0^-} \sin(h) = 0$$

Par conséquent, $\lim\limits_{h \to 0} \sin(h) = 0$.

Pour la deuxième limite à calculer, on écrit que :

$$\forall h \in \mathbb{R}, \qquad \cos(h) = 1 - 2\sin\left(\frac{h}{2}\right)^2 \qquad \text{(formule de duplication du cosinus)}$$

Or :

$$\lim_{h\to 0} \sin\left(\frac{h}{2}\right) = \lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$$

donc :

$$\lim_{h\to 0} \cos(h) = 1 - 2\times 0^2 = 1,$$

ce qui démontre la deuxième limite annoncée.

⋆ En divisant par $\sin(x) > 0$ dans $(*)$, on obtient :

$$1 \leqslant \frac{x}{\sin(x)} \leqslant \frac{1}{\cos(x)}$$

et comme la fonction inverse décroit sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient en passant à l'inverse :

$$\cos(x) \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant 1$$

Les fonctions $x \longrightarrow \cos(x)$ et $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ étant paires sur $\mathbb{R}^*$, on obtient :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}, \qquad \cos(x) \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant 1$$

Le théorème d'encadrement permet de conclure que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$. ■

Les propriétés des fonctions cos et sin sont les suivantes.

Proposition ⋆ Les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques et dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos'(x) = -\sin(x) \qquad \text{et} \qquad \sin'(x) = \cos(x)$$

⋆ La fonction cos est paire, tandis que sin est impaire.

⋆ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

⋆ Dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on obtient le graphe de la fonction cos en effectuant une translation de vecteur $-\frac{\pi}{2}\vec{i}$ du graphe de la fonction sin.

Démonstration ⋆ Les deuxième et quatrième points ont déjà été démontrés ; la propriété sur les graphes provient de l'identité :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$$

⋆ Étudions la dérivabilité de la fonction sin sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, on a (en utilisant les formules d'addition du sinus) :

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \frac{\sin(x)(\cos(h) - 1) + \cos(x)\sin(h)}{h} \\
&= \frac{\sin(h)}{h}\cos(x) + \frac{\cos(h) - 1}{h}\sin(x) \\
&= \frac{\sin(h)}{h}\cos(x) - \frac{\sin(h)}{h} \times \frac{\sin(h)}{1 + \cos(h)} \times \sin(x)
\end{aligned}$$

Le lemme précédent permet de conclure que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \cos(x)$$

Donc la fonction sin est dérivable au point x et $\sin'(x) = \cos(x)$.

⋆ L'inégalité à démontrer est claire pour $x = 0$ (les deux nombres mis en jeu valant 0). Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a (puisque $|x| > 0$) :

$$|\sin(x)| \leqslant |x| \iff \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leqslant 1 \iff -1 \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant 1$$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ étant paire sur $\mathbb{R}^*$, il suffit de démontrer la dernière double inégalité sur $\mathbb{R}_+^*$. Il s'agit donc de montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad -x \leqslant \sin(x) \leqslant x$$

Pour obtenir ces inégalités, il suffit d'étudier les fonctions $x \longmapsto x \pm \sin(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$). ■

7) Fonction tangente

On considère ici la fonction :

$$\tan : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array} \right.$$

Les propriétés de cette fonction sont les suivantes.

Proposition La fonction tan est définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left(\dfrac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$, elle est impaire et π-périodique sur $\mathscr{D}$. De plus, tan est dérivable sur $\mathscr{D}$ et :

$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad \tan'(x) = 1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

Par ailleurs, pour tout entier relatif k, la fonction tan est strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$.

Démonstration Pour tout $x \in \mathscr{D}$, on a $-x \in \mathscr{D}$ et :

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

et $(x - \pi, x + \pi) \in \mathscr{D}^2$ et :

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

donc tan est une fonction impaire et π-périodique. La fonction tan est de plus dérivable sur $\mathscr{D}$ comme quotient de deux fonctions dérivables et, pour tout $x \in \mathscr{D}$, on a :

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$$

La stricte croissance de tan sur chaque intervalle évoqué provient de la stricte positivité de la dérivée sur ces intervalles. ■

Par ailleurs, on a la dernière propriété algébrique suivante, qui permet d'exprimer un cosinus ou un sinus à l'aide d'une tangente.

Proposition (tan $\left(\frac{x}{2}\right)$) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$, on a les égalités :

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad \sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2} \qquad \text{et} \qquad \tan(x) = \frac{2t}{1 - t^2} \quad \text{si } x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$$

où $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Démonstration Soit $x \in \mathbb{R} \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$. D'après la formule d'addition de la tangente, on a :

$$\tan(x) = \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \frac{2t}{1-t^2}$$

et (formule de duplication du sinus) :

$$\begin{aligned}\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) &= 2t\cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ &= 2t \times \frac{1}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\ &= \frac{2t}{1+t^2}\end{aligned}$$

On déduit l'expression du cosinus en utilisant les deux premières identités. ■

II – Fonctions circulaires réciproques

Nous commençons par énoncer deux résultats qui vont nous permettre de construire les applications réciproques de sin, cos et tan.

1) Théorème de la bijection et théorème de dérivabilité d'une réciproque

Théorème Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

⋆ **Théorème de la bijection**

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone sur I, alors :

(i) f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$;

(ii) l'application réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$ est continue sur J de même monotonie que f.

⋆ **Théorème de dérivabilité d'une réciproque**

Si de plus f est dérivable sur I et si :

$$\forall x \in I, \qquad f'(x) \neq 0,$$

alors f^{-1} est dérivable sur J et :

$$\forall x \in J, \qquad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Remarques :

⋆ Dans ces conditions, on sait qu'on a les égalités $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_J$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_I$, *i.e.* :

$$(\forall x \in J,\ f(f^{-1}(x)) = x) \qquad \text{et} \qquad (\forall x \in I,\ f^{-1}(f(x)) = x)$$

⋆ Dans un repère orthonormal, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple Les fonctions $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$.

2) Construction de la fonction Arcsin et propriétés

Problème : la fonction sin n'est pas injective sur $\mathbb{R}$!

Considérons donc la restriction de la fonction sin sur l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\widehat{\sin} : \left\{ \begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{array} \right.$$

- ⋆ La fonction $\widehat{\sin}$ est continue sur I.
- ⋆ La fonction $\widehat{\sin}$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \qquad \widehat{\sin}'(x) = \cos(x)$$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$\widehat{\sin}'(x)$	0	$+$	0

Donc la fonction $\widehat{\sin}$ est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

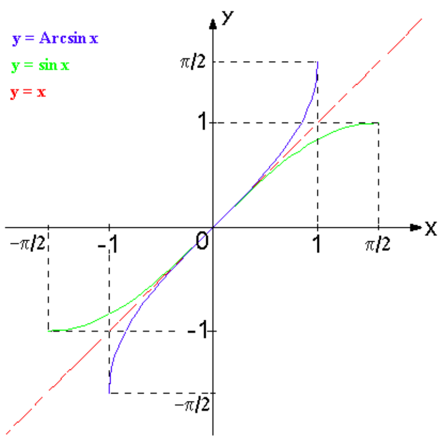
D'après le théorème de la bijection, cette fonction réalise donc une bijection de I sur son image :

$$\widehat{\sin}(I) = [-1,1]$$

La fonction $\widehat{\sin}$ admet donc une fonction réciproque.

Définition (fonction Arcsin) On appelle fonction Arcsinus, notée Arcsin : $[-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, la fonction réciproque de la fonction $\widehat{\sin}$.

D'après le théorème de la bijection, la fonction Arcsin est strictement croissante sur $[-1,1]$.



x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{Arcsin}(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Les propriétés de la fonctions Arcsin sont les suivantes.

Proposition ⋆ On a :

$$(\forall x \in [-1,1],\ \sin(\text{Arcsin}(x)) = x \qquad \text{et} \qquad \left(\forall x \in \left[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right],\ \text{Arcsin}(\sin(x)) = x\right)$$

⋆ La fonction $\text{Arcsin} : [-1,1] \longrightarrow \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ est une bijection continue strictement croissante.

⋆ La fonction Arcsin est impaire.

⋆ La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Démonstration ⋆ Les deux premiers points sont une conséquence du fait que Arcsin soit la réciproque de $\widehat{\sin}$:

$$\widehat{\sin} \circ \text{Arcsin} = \text{Id}_{[-1,1]} \qquad \text{et} \qquad \text{Arcsin} \circ \widehat{\sin} = \text{Id}_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$$

⋆ C'est une conséquence du théorème de la bijection.

⋆ L'ensemble $[-1,1]$ est symétrique par rapport à 0. De plus, pour tout $x \in [-1,1]$, on a :

$$\begin{aligned} \text{Arcsin}(-x) &= \text{Arcsin}(-\widehat{\sin}(\text{Arcsin}(x)) = \text{Arcsin}(\widehat{\sin}(-\text{Arcsin}(x)) \qquad (\text{car la fonction } \widehat{\sin} \text{ est impaire}) \\ &= -\text{Arcsin}(x) \end{aligned}$$

Donc la fonction Arcsin est impaire sur $[-1,1]$.

⋆ Montrons maintenant que Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$. On sait que $\widehat{\sin}$ est dérivable sur $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et que sa dérivée ne s'annule pas sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Donc la fonction Arcsin est dérivable sur :

$$\widehat{\sin}\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) =]-1,1[$$

et :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sin'(\text{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\cos(\text{Arcsin}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

car, comme $\text{Arcsin}(x) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a $\cos(\text{Arcsin}(x)) \geqslant 0$ donc :

$$\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{\cos(\text{Arcsin}(x))^2} = \sqrt{1-\sin(\text{Arcsin}(x))^2} = \sqrt{1-x^2},$$

d'où l'expression de Arcsin annoncée. ■

Remarque : Il faut être prudent avec la formule de composition $\text{Arcsin} \circ \sin(x) = \text{Id}$. Il est fondamental que le point auquel on l'applique appartienne à l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Par exemple :

$$\text{Arcsin}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \text{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \neq \frac{2\pi}{3}$$

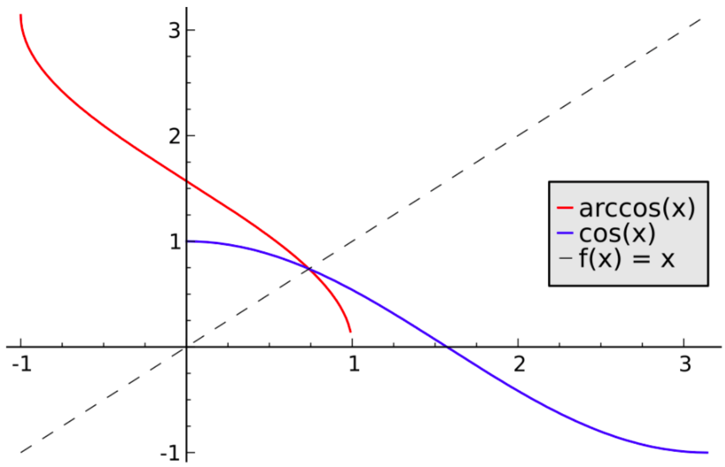
3) La fonction Arccos

De la même manière, on démontre en utilisant le théorème de la bijection que la fonction suivante est bijective (strictement décroissante) :

$$\widehat{\cos} : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array} \right.$$

x	0		π
$\widehat{\cos}'(x)$	0	$-$	0

Définition (fonction Arccos) On appelle fonction Arccosinus, notée Arccos : $[-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$, la fonction réciproque de la fonction $\widehat{\cos}$.



x	$\mathbf{0}$	$\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$	$\dfrac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}}$	$\dfrac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$	$\mathbf{1}$
Arccos(x)	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{6}$	0

Les propriétés de la fonction Arccos, laissées en exercice, sont les suivantes.

Proposition ⋆ On a :

$$(\forall x \in [-1,1],\ \cos(\mathrm{Arccos}(x)) = x \qquad \text{et} \qquad (\forall x \in [0,\pi]\,,\ \mathrm{Arccos}(\cos(x)) = x)$$

- ⋆ La fonction Arccos : $[-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$ est une bijection continue strictement décroissante.
- ⋆ La fonction Arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \mathrm{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Remarques :

- ⋆ La fonction Arccos n'est pas paire. En effet, $\mathrm{Arccos}(-1) = \pi$ et $\mathrm{Arccos}(1) = 0 \neq \mathrm{Arccos}(-1)$.
- ⋆ Les fonctions Arccos et Arcsin ne sont pas dérivables en ± 1 : en ces points, les courbes représentatives de Arccos et Arcsin admettent des tangente verticale.

4) La fonction Arctan

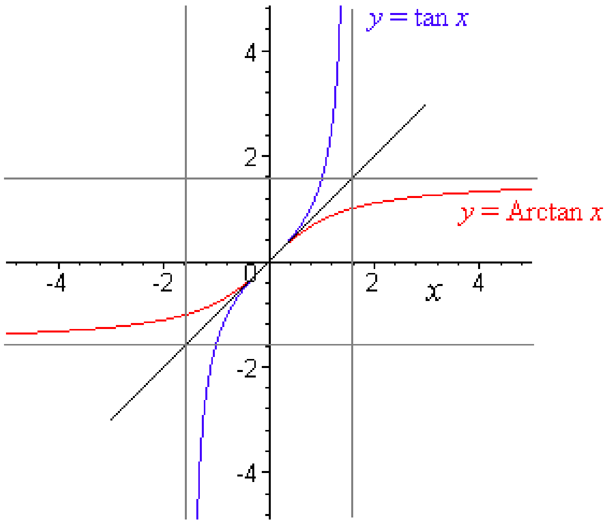
Enfin, on peut montrer que la fonction :

$$\widehat{\tan} : \left\{ \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan(x) \end{array} \right.$$

est bijective (continue, strictement croissante) en utilisant le théorème de la bijection.

x	$-\frac{\pi}{2}$ $\qquad\qquad$ $\frac{\pi}{2}$
$\widehat{\tan}'(x)$	$+$

Définition (fonction Arctan) On appelle fonction Arctangente, notée Arctan : $\mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, la fonction réciproque de la fonction $\widehat{\tan}$.



$\boldsymbol{x}$	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}$	$\mathbf{1}$	$\boldsymbol{\sqrt{3}}$
Arctan($\boldsymbol{x}$)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

Les propriétés de la fonction Arctan, laissées en exercice, sont les suivantes.

Proposition ⋆ On a :

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ \tan(\mathrm{Arctan}(x)) = x) \qquad \text{et} \qquad \left(\forall x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[,\ \tan(\mathrm{Arctan}(x)) = x\right)$$

- ⋆ La fonction Arctan : $\mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est une bijection continue strictement croissante.
- ⋆ La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

- ⋆ $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{Arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}$
- ⋆ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-\frac{\pi}{2} \leqslant \mathrm{Arctan}(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$.
- ⋆ La fonction Arctan est impaire sur $\mathbb{R}$.