

RELATIONS BINAIRES

Table des matières

1	Relations binaires	1
1.1	Relation d'ordre	2
1.2	Majorants, minorants	3
2	Relation d'équivalence	4
2.1	Définition	4
2.2	Un exemple important : la relation de congruence	4
2.2.1	Congruences dans $\mathbb{Z}$	4
2.2.2	Congruences dans $\mathbb{R}$	5
2.3	Classes d'équivalences	5

La notion de relation permet de comparer des objets mathématiques. Par exemple :

- ★ quand nous disons que 3 est inférieur ou égal à 5, nous mettons en relation les nombres 3 et 5 avec la relation « inférieur ou égal » ;
- ★ quand on dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$, on compare deux ensembles à l'aide de la relation d'inclusion ;
- ★ quand nous disons que $1 + i$ et $1 - i$ ont même module, nous sommes en train de comparer deux nombres complexes à l'aide du module.
- ★ si $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + 1 \end{cases}$, on sait que $g \leq f$ sur $\mathbb{R}$, i.e. :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \leq f(x)$$

Dans tout ce chapitre, E désigne un ensemble non vide quelconque.

I – Relations binaires

Nous définissons ici ce qu'est une relation binaire sur un ensemble.

Définition (relation)

★ On appelle *relation* binaire sur E toute partie $\mathcal{R}$ de $E \times E$.

- ★ Si $\mathcal{R}$ est une telle relation et si $(x, y) \in \mathcal{R}$, on dit que « x est en relation avec y par la relation $\mathcal{R}$ », ce que l'on note :

$$x\mathcal{R}y$$

Exemple

- ★ Sur l'ensemble $E = \llbracket 1, 4 \rrbracket$, la relation $<$ est, d'après la définition précédente, le sous-ensemble de E^2 suivant :

$$< = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$$

En pratique, on comparera directement les éléments à l'aide de la relation.

★ Considérons la relation « divise », notée $\mathcal{R}$ sur l'ensemble $\llbracket 1, 4 \rrbracket$. Autrement dit :

$$\forall (a, b) \in \llbracket 1, 4 \rrbracket, \quad a \mathcal{R} b \iff a \mid b$$

Ainsi, cette relation est complètement déterminée par les relations :

$$1 \mid 1, 1 \mid 2, 1 \mid 3, 1 \mid 4, 2 \mid 2, 2 \mid 4, 3 \mid 3 \text{ et } 4 \mid 4$$

★ Sur l'ensemble $E = \{\text{Tom}, \text{Max}, \text{Lou}, \text{Lili}\}$, on peut considérer la relation $\heartsuit$ définie par :

$$\text{Lou} \heartsuit \text{Max}, \quad \text{Max} \heartsuit \text{Lou}, \quad \text{Lili} \heartsuit \text{Max} \quad \text{et} \quad \text{Tom} \heartsuit \text{Tom}$$

Remarque : le couple $(x, y) \in E^2$ n'étant pas le couple $(y, x) \in E^2$ si $x \neq y$, la relation $x \mathcal{R} y$ peut être vraie sans que la relation $y \mathcal{R} x$ le soit ! Par exemple :

★ Pour la relation divise ci-dessus, on a $1 \mid 4$ mais $4 \nmid 1$

★ On a $\text{Lili} \heartsuit \text{Max}$ mais $\text{Max} \nheartsuit \text{Lili}$

1) Relation d'ordre

Les propriétés importantes que doivent vérifier les « bonnes » relations sont les suivantes.

Définition (relation d'ordre) Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E . On dit que $\mathcal{R}$ est une *relation d'ordre* sur E si elle est :

★ *réflexive*, i.e. :

$$\forall x \in E, \quad x \mathcal{R} x$$

★ *antisymétrique*, i.e. :

$$\forall x, y \in E, \quad (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x) \implies x = y$$

★ *transitive*, i.e. :

$$\forall x, y, z \in E, \quad (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \implies x \mathcal{R} z$$

On dit aussi que le couple $(E, \mathcal{R})$ est un *ensemble ordonné*.

Notation. une relation d'ordre est souvent notée $\leq$ ou $\preceq$ ou $\preccurlyeq$.

Remarque : en pratique, on n'explicite pas l'ensemble $\mathcal{R}$ (comme sous-ensemble de E^2) mais on manipule directement la relation en comparant les éléments de E *via* cette relation.

Exemple ★ Sur $\mathbb{R}$, la relation $\leq$ est une relation d'ordre. En effet :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien $x \leq x$;
- pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si $x \leq y$ et $y \leq x$, alors $x = y$;
- pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors $x \leq z$.

★ Sur $\mathcal{P}(E)$, la relation $\subset$ est une relation d'ordre.

★ Sur $\mathbb{N}$, la relation $\mid$ est une relation d'ordre.

Démonstration

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $n = 1 \times n$ et $1 \in \mathbb{N}$ donc $n \mid n$. Ainsi, la relation $\mid$ est réflexive sur $\mathbb{N}$.
- Soient $m, n \in \mathbb{N}$. On suppose que $m \mid n$ et que $n \mid m$. Il existe alors $k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $n = km$ et $m = \ell n$. Par conséquent, on a $n = \ell kn$ donc $(1 - \ell k)n = 0$. Si $n = 0$, alors $m = \ell \times 0 = 0$ donc $m = n$. Sinon, on a $\ell k = 1$, et comme $\ell, k \in \mathbb{N}$, il vient $\ell = k = 1$, d'où l'on tire que $m = n$. Dans les deux cas, on a bien $m = n$. La relation $\mid$ est donc antisymétrique sur $\mathbb{N}$.

- Soient $m, n, p \in \mathbb{N}$. On suppose que $m \mid n$ et que $n \mid p$. Il existe alors $k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $n = km$ et $p = \ell n$. Ainsi :

$$p = \ell n = \ell(km) = (\ell k)m$$

Comme $\ell k \in \mathbb{N}$, on a bien $m \mid p$. La relation $\mid$ est donc transitive sur $\mathbb{N}$.

Finalement, $\mid$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$. ■

- ★ Sur $\mathbb{Z}$, la relation $\mid$ n'est pas une relation d'ordre (en effet, elle n'est pas antisymétrique car $4 \mid -4$ et $-4 \mid 4$; pourtant $4 \neq -4$).
- ★ Sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la relation $\leq$ est une relation d'ordre.
- ★ La relation $\heartsuit$ n'est pas une relation d'ordre (par exemple car elle n'est pas réflexive).

Définition (ordre partiel, ordre total) Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné. On dit l'ordre est *total* sur E (ou que $(E, \mathcal{R})$ est un ensemble *totalement ordonné*) si :

$$\forall x, y \in E, \quad x \mathcal{R} y \text{ ou } y \mathcal{R} x$$

Dans le cas contraire, on dit que l'ordre sur E est *partiel*.

Remarque : dire que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre totale sur E signifie donc que deux éléments quelconques x et y de E peuvent être comparés ; on a nécessairement ou bien $x \mathcal{R} y$, ou bien $y \mathcal{R} x$.

Exemple ★ L'ensemble $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné.

- ★ Par contre, $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est partiellement ordonné dès que $|E| \geq 2$.
- ★ De même, l'ordre $\leq$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est partiel.
- ★ La relation d'ordre $\mid$ sur $\mathbb{N}$ n'est pas totale (en effet, 4 et 5 ne sont pas en relation).
- ★ La relation $\heartsuit$ est partielle (on ne peut pas comparer Tom et Lili).

2) Majorants, minorants

On peut généraliser les notions de majorant, minorant, maximum et minimum vus dans $\mathbb{R}$ à un ensemble ordonné.

Définition (majorant, minorant) Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné, $A \in \mathcal{P}(E)$ et $x \in E$.

- ★ On dit que x est un *majorant* de A si :

$$\forall a \in A, \quad a \preccurlyeq x$$

On dit aussi que A est majoré par x (pour la relation $\preccurlyeq$).

- ★ On dit que x est le *maximum* A (ou le *plus grand élément* de A) si :

$$x \in A \quad \text{et} \quad (\forall a \in A, \quad a \preccurlyeq x)$$

On note alors $x = \max(A, \preccurlyeq)$.

- ★ On dit que x est un *minorant* de A si :

$$\forall a \in A, \quad x \preccurlyeq a$$

- ★ On dit que x est le *minimum* de A (ou le *plus petit élément* de A) si :

$$x \in A \quad \text{et} \quad (\forall a \in A, \quad x \preccurlyeq a)$$

On note alors $x = \min(A, \preccurlyeq)$.

- ★ On dira que l'ensemble A est bornée s'il est à la fois minoré et majoré.

Remarque : la définition sous-entend l'unicité du maximum et/ou du minimum lorsqu'il(s) existe(nt), ce qui s'obtient avec la propriété d'antisymétrie de la relation *preccurlyeq* (il est ici supposé que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre).

- Exemple** ★ Pour la relation $\leq$, l'ensemble $\mathbb{R}$ n'est ni majoré, ni minoré (en particulier, il n'admet ni minimum, ni maximum).
- ★ Pour la relation $\leq$, l'ensemble $[0, 1[$ est majoré par 1, n'admet pas de maximum, est minoré par -5 et cet ensemble ordonné admet 0 pour minimum.
- ★ $(\mathbb{N}, |)$ admet pour minimum 1 et pour maximum 0 (en effet, tout entier naturel n divise 0 puisque l'on peut écrire $0 = n \times 0$).
- ★ $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est minoré par $\emptyset$ et majoré par E . Par ailleurs, $\emptyset = \min(\mathcal{P}(E), \subset)$ et $E = \max(\mathcal{P}(E), \subset)$. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est donc borné pour la relation $\subset$.

II – Relation d'équivalence

1) Définition

Définition (relation d'équivalence) Une relation $\mathcal{R}$ sur E est appelée une *relation d'équivalence* si elle est :

★ *réflexive*, i.e. :

$$\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x$$

★ *symétrique*, i.e. :

$$\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$$

★ *transitive*, i.e. :

$$\forall x, y, z \in E, \quad (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$$

Exemple ★ La relation d'égalité $=$ sur E est une relation d'équivalence (c'est aussi une relation d'ordre).

★ Soit F un ensemble non vide et $f \in F^E$. La relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$$

est une relation d'équivalence sur E .

- ★ La relation $\heartsuit$ n'est pas une relation d'équivalence.
- ★ Sur $\mathbb{N}$, la relation de divisibilité $|$ n'est pas une relation d'équivalence (la propriété de symétrie étant mise en défaut). Il s'agit par contre d'une relation d'ordre.
- ★ Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la relation $\leq$ est une relation d'ordre qui n'est pas une relation d'équivalence.

2) Un exemple important : la relation de congruence

(a) Congruences dans $\mathbb{Z}$

Définition (congruence) Soient $a, b, n \in \mathbb{Z}$. On dit que a est congru à b modulo n , noté $a \equiv b [n]$, s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + kn$.

Exemple On a $7 \equiv 3 [2]$, $13 \equiv -1 [7]$.

Remarques :

- ★ La congruence modulo 0 est tout simplement la relation d'égalité.
- ★ La congruence modulo 1 est la relation triviale : tous les entiers sont congrus entre eux modulo 1.
- ★ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la congruence modulo n est la congruence modulo $-n$ (cela ne change rien à remplacer n par $-n$ dans la définition précédente).

Proposition Soit $n \in \mathbb{N}$. La congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

Démonstration Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que la relation de congruence modulo n est réflexive, symétrique et transitive.

- ★ Soit $a \in \mathbb{Z}$. On peut écrire que $a = a + 0 \times n$ (et $0 \in \mathbb{Z}$) donc $a \equiv a[n]$. La relation est donc réflexive.
- ★ Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On suppose que $a \equiv b[n]$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + kn$, ce que l'on peut réécrire :

$$b = a + (-k)n$$

Comme $-k \in \mathbb{Z}$ (puisque $k \in \mathbb{Z}$), on a aussi $b \equiv a[n]$. La relation est donc symétrique.

- ★ Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. On suppose que $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n]$. Alors il existe $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$a = b + kn \quad \text{et} \quad b = c + \ell n$$

Par conséquent :

$$a = (c + \ell n) + kn = c + (\ell + k)n$$

Comme $\ell + k \in \mathbb{Z}$ (puisque ℓ et k sont des entiers), on a la relation $a \equiv c[n]$. La relation est donc aussi transitive.

Finalement, la congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. ■

(b) Congruences dans $\mathbb{R}$

Définition (congruence) Soient $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$. On dit que a est congru à b modulo α , noté $a \equiv b[\alpha]$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + kn$.

Remarques :

- ★ Dans la définition, le k est un entier. La congruence modulo 0 est tout simplement la relation d'égalité.
- ★ Nous utiliserons souvent la relation de congruence modulo 2π (ou π).

Exemple $\frac{13\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{6} [\pi]$

Proposition Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La congruence modulo α est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

Démonstration La démonstration est identique à la précédente. ■

3) Classes d'équivalences

La notion de classe d'équivalence permet de rassembler, dans un ensemble muni d'une relation d'équivalence, tous les éléments qui sont en relation.

Définition (classe d'équivalence) Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E .

- ★ Soit $x \in E$. On appelle *classe (d'équivalence) de x modulo $\mathcal{R}$* l'ensemble noté $\bar{x}$ des éléments de E qui sont en relation avec x pour la relation $\mathcal{R}$, i.e. :

$$\bar{x} = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$$

- ★ L'ensemble des classes d'équivalences de E pour la relation $\mathcal{R}$ est noté $E/\mathcal{R}$. Autrement dit :

$$E/\mathcal{R} = \{\bar{x} \mid x \in E\}$$

Cet ensemble est aussi appelé *ensemble quotient de E par la relation $\mathcal{R}$* .

Remarque : $E/\mathcal{R}$ est donc un ensemble de sous-ensembles de E . Autrement dit, $E/\mathcal{R} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$.

Proposition Soient $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E et $x, y \in E$. Si $x\mathcal{R}y$, alors $\bar{x} = \bar{y}$.

Démonstration On raisonne par double inclusion.

- ★ Soit $z \in \bar{x}$. Alors $z\mathcal{R}x$. Si $x\mathcal{R}y$, alors $z\mathcal{R}y$ par transitivité de $\mathcal{R}$. On a donc $\bar{x} \subset \bar{y}$.
- ★ On obtient l'autre inclusion de manière analogue.

Par double inclusion, on a bien l'égalité annoncée. ■

Exemple Soient $a, n \in \mathbb{N}$. La classe d'équivalence de a pour la relation de congruence modulo n est :

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv a [n]\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, b = a + kn\} \\ &= \{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

Par exemple, pour $n = 2$, on a :

$$\bar{0} = 2\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \bar{1} = 2\mathbb{Z} + 1$$

La famille des classes d'équivalences de E (pour la relation $\mathcal{R}$) est une partition de l'ensemble E d'après le résultat suivant.

Proposition Soient E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E . Alors $(C)_{C \in E/\mathcal{R}}$ est une partition de E , i.e. :

- (i) $\forall C \in E/\mathcal{R}, C \neq \emptyset$;
- (ii) $\forall C, C' \in E/\mathcal{R}, C \neq C' \implies C \cap C' = \emptyset$;
- (iii) $\bigcup_{C \in E/\mathcal{R}} C = E$.

Démonstration Pour tout $x \in E$, on note $\bar{x}$ la classe d'équivalence de x dans E pour la relation $\mathcal{R}$.

- (i) Soit $C \in E/\mathcal{R}$. Par définition d'une classe d'équivalence, il existe $x \in E$ tel que $C = \bar{x}$. Par réflexivité de la relation d'équivalence, on a $x\mathcal{R}x$ donc $x \in C$. Ainsi, C est non vide.
- (ii) Soient $C, C' \in E/\mathcal{R}$. Par définition d'une classe d'équivalence, il existe $x, y \in E$ tels que $C = \bar{x}$ et $C' = \bar{y}$. Raisonnons maintenant par contraposition. Supposons que $C \cap C' \neq \emptyset$, alors il existe $z \in E$ tel que $z \in C \cap C'$. D'après la proposition précédente, on a $C = \bar{z} = C'$.

(iii) Pour tout $x \in E$, on a $x \in \bar{x}$ donc $C \subset \bigcup_{C \in E/\mathcal{R}} C = E$. L'inclusion réciproque est immédiate. ■

Remarque : le théorème de la division euclidienne (chapitre « Arithmétique des entiers relatifs ») nous permettra de montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, tout entier relatif appartient à la classe d'équivalence, pour la relation de congruence modulo n , d'un et un seul élément de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Les classes d'équivalence de $\mathbb{Z}$ pour cette relation sont donc les ensembles $k + n\mathbb{Z}$, où $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. On note traditionnellement $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient formé de ces classes d'équivalence.