Relations binaires

La notion de relation permet de comparer des objets mathématiques. Par exemple :

- ⋆ quand nous disons que 3 est inférieur ou égal à 5, nous mettons en relation les nombres 3 et 5 avec la relation « inférieur ou égal » ;
- ⋆ quand on dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$, on compare deux ensembles à l'aide de la relation d'inclusion ;
- ⋆ quand nous disons que $1+i$ et $1-i$ ont même module, nous sommes en train de comparer deux nombres complexes à l'aide du module.
- ⋆ si $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array} \right.$, on sait que $g \leqslant f$ sur $\mathbb{R}$, *i.e.* :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \leqslant f(x)$$

Dans tout ce chapitre, E désigne un ensemble non vide quelconque.

I – Relations binaires

Nous définissons ici ce qu'est une relation binaire sur un ensemble.

Définition (relation) ⋆ On appelle *relation* binaire sur E toute partie $\mathscr{R}$ de $E \times E$.

⋆ Si $\mathscr{R}$ est une telle relation et si $(x, y) \in \mathscr{R}$, on dit que « x est en relation avec y par la relation $\mathscr{R}$ », ce que l'on note :

$$x \mathscr{R} y$$

Exemple ⋆ Sur l'ensemble $E = [\![1, 4]\!]$, la relation $<$ est, d'après la définition précédente, le sous-ensemble de E^2 suivant :

$$<= \big\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\big\}$$

En pratique, on comparera directement les éléments à l'aide de la relation.

⋆ Considérons la relation « divise », notée $\mathscr{R}$ sur l'ensemble $[\![1, 4]\!]$. Autrement dit :

$$\forall (a,b) \in [\![1,4]\!], \qquad a \mathscr{R} b \iff a \mid b$$

Ainsi, cette relation est complètement déterminée par les relations :

$$1 \mid 1,\ 1 \mid 2,\ 1 \mid 3,\ 1 \mid 4,\ 2 \mid 2,\ 2 \mid 4,\ 3 \mid 3 \text{ et } 4 \mid 4$$

⋆ Sur l'ensemble $E = \big\{\mathrm{Tom}, \mathrm{Max}, \mathrm{Lou}, \mathrm{Lili}\big\}$, on peut considérer la relation $\heartsuit$ définie par :

$$\mathrm{Lou} \heartsuit \mathrm{Max}, \qquad \mathrm{Max} \heartsuit \mathrm{Lou}, \qquad \mathrm{Lili} \heartsuit \mathrm{Max} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Tom} \heartsuit \mathrm{Tom}$$

Remarque : le couple $(x, y) \in E^2$ n'étant pas le couple $(y, x) \in E^2$ si $x \neq y$, la relation $x \mathscr{R} y$ peut être vraie sans que la relation $y \mathscr{R} x$ le soit ! Par exemple :

- ⋆ Pour la relation divise ci-dessus, on a $1 \mid 4$ mais $4 \nmid 1$
- ⋆ On a $\mathrm{Lili} \heartsuit \mathrm{Max}$ mais $\mathrm{Max} \not\heartsuit \mathrm{Lili}$

1) Relation d'ordre

Les propriétés importantes que doivent vérifier les « bonnes » relations sont les suivantes.

Définition (relation d'ordre) Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathscr{R}$ est une *relation d'ordre* sur E si elle est :

⋆ *réflexive, i.e.* :
$$\forall x \in E, \qquad x\mathscr{R}x$$

⋆ *antisymétrique, i.e.* :
$$\forall x, y \in E, \qquad \big(x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x\big) \Longrightarrow x = y$$

⋆ *transitive, i.e.* :
$$\forall x, y, z \in E, \qquad \big(x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}z\big) \Longrightarrow x\mathscr{R}z$$

On dit aussi que le couple $(E, \mathscr{R})$ est un *ensemble ordonné*.

Notation. une relation d'ordre est souvent notée $\leqslant$ ou $\preceq$ ou $\preccurlyeq$.

Remarque : en pratique, on n'explicite pas l'ensemble $\mathscr{R}$ (comme sous-ensemble de E^2) mais on manipule directement la relation en comparant les éléments de E *via* cette relation.

Exemple ⋆ Sur $\mathbb{R}$, la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre. En effet :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien $x \leqslant x$;
- pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$, alors $x = y$;
- pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$.

⋆ Sur $\mathscr{P}(E)$, la relation $\subset$ est une relation d'ordre.

⋆ Sur $\mathbb{N}$, la relation $|$ est une relation d'ordre.

Démonstration • Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $n = 1 \times n$ et $1 \in \mathbb{N}$ donc $n \mid n$. Ainsi, la relation $|$ est réflexive sur $\mathbb{N}$.

• Soient $m, n \in \mathbb{N}$. On suppose que $m \mid n$ et que $n \mid n$. Il existe alors $k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $n = km$ et $m = \ell n$. Par conséquent, on a $n = \ell k n$ donc $(1 - \ell k)n = 0$. Si $n = 0$, alors $m = \ell \times 0 = 0$ donc $m = n$. Sinon, on a $\ell k = 1$, et comme $\ell, k \in \mathbb{N}$, il vient $\ell = k = 1$, d'où l'on tire que $m = n$. Dans les deux cas, on a bien $m = n$. La relation $|$ est donc antisymétrique sur $\mathbb{N}$.

• Soient $m, n, p \in \mathbb{N}$. On suppose que $m \mid n$ et que $n \mid p$. Il existe alors $k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $n = km$ et $p = \ell n$. Ainsi :
$$p = \ell n = \ell(km) = (\ell k)m$$
Comme $\ell k \in \mathbb{N}$, on a bien $m \mid p$. La relation $|$ est donc transitive sur $\mathbb{N}$.

Finalement, $|$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$. ■

⋆ Sur $\mathbb{Z}$, la relation $|$ n'est pas une relation d'ordre (en effet, elle n'est pas antisymétrique car $4 \mid -4$ et $-4 \mid 4$; pourtant $4 \neq -4$).

⋆ Sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre.

⋆ La relation $\heartsuit$ n'est pas une relation d'ordre (par exemple car elle n'est pas réflexive).

Définition (ordre partiel, ordre total) Soit $(E, \mathscr{R})$ un ensemble ordonné. On dit l'ordre est *total* sur E (ou que $(E, \mathscr{R})$ est un ensemble *totalement ordonné*) si :
$$\forall x, y \in E, \qquad x\mathscr{R}y \text{ ou } y\mathscr{R}x$$
Dans le cas contraire, on dit que l'ordre sur E est *partiel*.

Remarque : dire que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre totale sur E signifie donc que deux éléments quelconques x et y de E peuvent être comparés ; on a nécessairement ou bien $x\mathscr{R}y$, ou bien $y\mathscr{R}x$.

Exemple $\star$ L'ensemble $(\mathbb{R}, \leqslant)$ est totalement ordonné.

- $\star$ Par contre, $(\mathscr{P}(E), \subset)$ est partiellement ordonné dès que $|E| \geqslant 2$.
- $\star$ De même, l'ordre $\leqslant$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est partiel.
- $\star$ La relation d'ordre $|$ sur $\mathbb{N}$ n'est pas totale (en effet, 4 et 5 ne sont pas en relation).
- $\star$ La relation $\heartsuit$ est partielle (on ne peut pas comparer Tom et Lili).

2) Majorants, minorants

On peut généraliser les notions de majorant, minorant, maximum et minimum vus dans $\mathbb{R}$ à un ensemble ordonné.

Définition (majorant, minorant) Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné, $A \in \mathscr{P}(E)$ et $x \in E$.

- $\star$ On dit que x est un *majorant* de A si :

$$\forall a \in A, \qquad a \preccurlyeq x$$

  On dit aussi que A est majoré par x (pour la relation $\preccurlyeq$).

- $\star$ On dit que x est le *maximum* A (ou le *plus grand élément* de A) si :

$$x \in A \qquad \text{et} \qquad (\forall a \in A, \quad a \preccurlyeq x)$$

  On note alors $x = \max(A, \preccurlyeq)$.

- $\star$ On dit que x est un *minorant* de A si :

$$\forall a \in A, \qquad x \preccurlyeq a$$

- $\star$ On dit que x est *le maximum* de A (ou le *plus petit élément* de A) si :

$$x \in A \qquad \text{et} \qquad (\forall a \in A, \quad x \preccurlyeq a)$$

  On note alors $x = \min(A, \preccurlyeq)$.

- $\star$ On dira que l'ensemble A est bornée s'il est à la fois minoré et majoré.

Remarque : la définition sous-entend l'unicité du maximum et/ou du minimum lorsqu'il(s) existe(nt), ce qui s'obtient avec la propriété d'antisymétrie de la relation
preccurlyeq (il est ici supposé que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre).

Exemple $\star$ Pour la relation $\leqslant$, l'ensemble $\mathbb{R}$ n'est ni majoré, ni minoré (en particulier, il n'admet ni minimum, ni maximum).

- $\star$ Pour la relation $\leqslant$, l'ensemble $[0, 1[$ est majoré par 1, n'admet pas de maximum, est minoré par -5 et cet ensemble ordonné admet 0 pour minimum.
- $\star$ $(\mathbb{N}, |)$ admet pour minimum 1 et pour maximum 0 (en effet, tout entier naturel n divise 0 puisque l'on peut écrire $0 = n \times 0$).
- $\star$ $(\mathscr{P}(E), \subset)$ est minoré par $\varnothing$ et majoré par E. Par ailleurs, $\varnothing = \min(\mathscr{P}(E), \subset)$ et $E = \max(\mathscr{P}(E), \subset)$. L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ est donc borné pour la relation $\subset$.

II – Relation d'équivalence

1) Définition

Définition (relation d'équivalence) Une relation $\mathscr{R}$ sur E est appelée une *relation d'équivalence* si elle est :

- ⋆ *réflexive*, *i.e.* :
$$\forall x \in E, \qquad x\mathscr{R}x$$
- ⋆ *symétrique*, *i.e.* :
$$\forall x, y \in E, \qquad x\mathscr{R}y \Longrightarrow y\mathscr{R}x$$
- ⋆ *transitive*, *i.e.* :
$$\forall x, y, z \in E, \qquad \big(x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}z\big) \Longrightarrow x\mathscr{R}z$$

Exemple ⋆ La relation d'égalité $=$ sur E est une relation d'équivalence (c'est aussi une relation d'ordre).

- ⋆ Soit F un ensemble non vide et $f \in F^E$. La relation $\mathscr{R}$ définie par :
$$\forall x, y \in E, \qquad x\mathscr{R}y \iff f(x) = f(y)$$
est une relation d'équivalence sur E.
- ⋆ La relation ♡ n'est pas une relation d'équivalence.
- ⋆ Sur $\mathbb{N}$, la relation de divisibilité $|$ n'est pas une relation d'équivalence (la propriété de symétrie étant mise en défaut). Il s'agit par contre d'une relation d'ordre.
- ⋆ Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la relation $\leqslant$ est une relation d'ordre qui n'est pas une relation d'équivalence.

2) Un exemple important : la relation de congruence

(a) Congruences dans $\mathbb{Z}$

Définition (congruence) Soient $a, b, n \in \mathbb{Z}$. On dit que *a est congru à b modulo n*, noté $a \equiv b\ [n]$, s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + kn$.

Exemple On a $7 \equiv 3\ [2]$, $13 \equiv -1\ [7]$.

Remarques :

- ⋆ La congruence modulo 0 est tout simplement la relation d'égalité.
- ⋆ La congruence modulo 1 est la relation triviale : tous les entiers sont congrus entre eux modulo 1.
- ⋆ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la congruence modulo n est la congruence modulo $-n$ (cela ne change rien à remplacer n par $-n$ dans la définition précédente).

Proposition Soit $n \in \mathbb{N}$. La congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

Démonstration Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que la relation de congruence modulo n est réflexive, symétrique et transitive.

- ⋆ Soit $a \in \mathbb{Z}$. On peut écrire que $a = a + 0 \times n$ (et $0 \in \mathbb{Z}$) donc $a \equiv a[n]$. La relation est donc réflexive.
- ⋆ Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On suppose que $a \equiv b[n]$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + kn$, ce que l'on peut réécrire :
$$b = a + (-k)n$$
Comme $-k \in \mathbb{Z}$ (puisque $k \in \mathbb{Z}$), on a aussi $b \equiv a[n]$. La relation est donc symétrique.
- ⋆ Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. On suppose que $a \equiv b[n]$ et $b \equiv c[n]$. Alors il existe $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :
$$a = b + kn \qquad \text{et} \qquad b = c + \ell n$$
Par conséquent :
$$a = (c + \ell n) + kn = c + (\ell + k)n$$
Comme $\ell + n \in \mathbb{Z}$ (puisque ℓ et k sont des entiers), on a la relation $a \equiv c[n]$. La relation est donc aussi transitive.

Finalement, la congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. ■

(b) Congruences dans $\mathbb{R}$

Définition (congruence) Soient $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$. On dit que *$a$ est congru à b modulo α*, noté $a \equiv b[\alpha]$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + kn$.

Remarques :

- ⋆ Dans la définition, le k est un entier. La congruence modulo 0 est tout simplement la relation d'égalité.
- ⋆ Nous utiliserons souvent la relation de congruence modulo 2π (ou π).

Exemple $\dfrac{13\pi}{6} \equiv \dfrac{\pi}{6} \; [\pi]$

Proposition Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La congruence modulo α est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

Démonstration La démonstration est identique à la précédente. ■

3) Classes d'équivalences

La notion de classe d'équivalence permet de rassembler, dans un ensemble muni d'une relation d'équivalence, tous les éléments qui sont en relation.

Définition (classe d'équivalence) Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E.

- ⋆ Soit $x \in E$. On appelle *classe (d'équivalence) de x modulo $\mathscr{R}$* l'ensemble noté $\bar{x}$ des éléments de E qui sont en relation avec x pour la relation $\mathscr{R}$, *i.e.* :
$$\bar{x} = \left\{ y \in E \,\middle|\, x \mathscr{R} y \right\}$$
- ⋆ L'ensemble des classes d'équivalences de E pour la relation $\mathscr{R}$ est noté $E/\mathscr{R}$. Autrement dit :
$$E/\mathscr{R} = \left\{ \bar{x} \,\middle|\, x \in E \right\}$$
Cet ensemble est aussi appelé *ensemble quotient de E par la relation $\mathscr{R}$*.

Remarque : $E/\mathscr{R}$ est donc un ensemble de sous-ensembles de E. Autrement dit, $E/\mathscr{R} \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$.

Proposition Soient $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E et $x, y \in E$. Si $x\mathscr{R}y$, alors $\overline{x} = \overline{y}$.

Démonstration On raisonne par double inclusion.

- ⋆ Soit $z \in \overline{x}$. Alors $z\mathscr{R}x$. Si $x\mathscr{R}y$, alors $z\mathscr{R}y$ par transitivité de $\mathscr{R}$. On a donc $\overline{x} \subset \overline{y}$.
- ⋆ On obtient l'autre inclusion de manière analogue.

Par double inclusion, on a bien l'égalité annoncée. ■

Exemple Soient $a, n \in \mathbb{N}$. La classe d'équivalence de a pour la relation de congruence modulo n est :

$$\begin{aligned}\overline{a} = \left\{b \in \mathbb{Z} \,\middle|\, b \equiv a\,[n]\right\} &= \left\{b \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \exists k \in \mathbb{Z},\ b = a + kn\right\} \\ &= \left\{a + kn \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}\end{aligned}$$

Par exemple, pour $n = 2$, on a :

$$\overline{0} = 2\mathbb{Z} \qquad \text{et} \qquad \overline{1} = 2\mathbb{Z} + 1$$

La famille des classes d'équivalences de E (pour la relation $\mathscr{R}$) est une partition de l'ensemble E d'après le résultat suivant.

Proposition Soient E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E. Alors $(C)_{C \in E/\mathscr{R}}$ est une partition de E, *i.e.* :

(i) $\forall C \in E/\mathscr{R},\ C \neq \varnothing$;

(ii) $\forall C, C' \in E/\mathscr{R}, \quad C \neq C' \implies C \cap C' = \varnothing$;

(iii) $\displaystyle\bigcup_{C \in E/\mathscr{R}} C = E$.

Démonstration Pour tout $x \in E$, on note $\overline{x}$ la classe d'équivalence de x dans E pour la relation $\mathscr{R}$.

(i) Soit $C \in E/\mathscr{R}$. Par définition d'une classe d'équivalence, il existe $x \in E$ tel que $C = \overline{x}$. Par réflexivité de la relation d'équivalence, on a $x\mathscr{R}x$ donc $x \in C$. Ainsi, C est non vide.

(ii) Soient $C, C' \in E/\mathscr{R}$. Par définition d'une classe d'équivalence, il existe $x, y \in E$ tels que $C = \overline{x}$ et $C' = \overline{y}$. Raisonnons maintenant par contraposition. Supposons que $C \cap C' \neq \varnothing$, alors il existe $z \in E$ tel que $z \in C \cap C'$. D'après la proposition précédente, on a $C = \overline{z} = C'$.

(iii) Pour tout $x \in E$, on a $x \in \overline{x}$ donc $C \subset \displaystyle\bigcup_{C \in E/\mathscr{R}} C = E$. L'inclusion réciproque est immédiate. ■

Remarque : le théorème de la division euclidienne (chapitre « Arithmétique des entiers relatifs ») nous permettra de montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, tout entier relatif appartient à la classe d'équivalence, pour la relation de congruence modulo n, d'un et un seul élément de $[\![0, n-1]\!]$. Les classes d'équivalence de $\mathbb{Z}$ pour cette relation sont donc les ensembles $k + n\mathbb{Z}$, où $k \in [\![0, n-1]\!]$. On note traditionnellement $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient formé de ces classes d'équivalence.