Nombres complexes

I – L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

La construction de l'ensemble $\mathbb{C}$ est hors-programme. Le résultat admis suivant permet de le définir. Il faut comprendre ce nouvel ensemble comme une extension de l'ensemble des nombres réels.

1) Définitions

Définition/théorème Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ (dont les éléments sont appelés *nombres complexes*), contenant $\mathbb{R}$ et muni de deux opérations + et × tel que :

- ⋆ il existe un élément dans $\mathbb{C}$, noté i, tel que $i^2 = -1$;
- ⋆ tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = a+ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$ (cette écriture s'appelle la *forme algébrique* de z)
- ⋆ les opérations + et × dans $\mathbb{C}$ vérifient les mêmes propriétés que les propriétés + et × dans $\mathbb{R}$

Démonstration admise ■

Vocabulaire/Notations.

- ⋆ Si $z = a+ib \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe (où $a, b \in \mathbb{R}$), on dit que a est la partie réelle de z (on la note $\mathrm{Re}(z)$) et que b est sa partie imaginaire (on la note $\mathrm{Im}(z)$). Ainsi :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$$

- ⋆ Un nombre complexe est appelé *un imaginaire pur* si sa partie réelle est nulle. L'ensemble des nombres complexes imaginaires purs, noté $i\mathbb{R}$, est donc :

$$i\mathbb{R} = \left\{ ib \,\middle|\, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemple Soient $z = 1+2i \in \mathbb{C}$ et $z' = 2-3i \in \mathbb{C}$. Alors :

$$z + 2z' = 5 - 4i \qquad \text{et} \qquad zz' = 8 + i$$

Remarques :

- ⋆ Un nombre réel est donc un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle.
- ⋆ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$.
- ⋆ L'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe signifie que :

$$\forall a, a', b, b' \in \mathbb{R}, \qquad a+ib = a'+ib' \iff \left\{ \begin{array}{l} a = a' \\ b = b' \end{array} \right.$$

- ⋆ Attention, les inégalités n'ont aucun sens dans $\mathbb{C}$!
- ⋆ Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $z = a+ib$ et $z' = c+id$ deux nombres complexes. Alors :

$$z + z' = \underbrace{(a+c)}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{(b+d)}_{\in\mathbb{R}} \qquad \text{et} \qquad zz' = (a+ib)(c+id) = \underbrace{(ac-bd)}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{(ad+bc)}_{\in\mathbb{R}}$$

Ceci est la forme algébrique de zz'.

Proposition **($\mathbb{R}$-linéarité des parties réelle et imaginaire)** Soit $z, z' \in \mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\operatorname{Re}(z+\lambda z') = \operatorname{Re}(z) + \lambda \operatorname{Re}(z') \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(z+\lambda z') = \operatorname{Im}(z) + \lambda \operatorname{Im}(z')$$

On dit que les application $z \longmapsto \operatorname{Re}(z)$ et $z \longmapsto \operatorname{Im}(z)$ sont $\mathbb{R}$-linéaires.

Démonstration On a :

$$z = \operatorname{Re}(z) + i\operatorname{Im}(z) \qquad \text{et} \qquad z' = \operatorname{Re}(z') + i\operatorname{Im}(z')$$

donc :

$$z + \lambda z' = \underbrace{(\operatorname{Re}(z) + \lambda\operatorname{Re}(z'))}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{(\operatorname{Im}(z) + \lambda\operatorname{Im}(z'))}_{\in\mathbb{R}}$$

Mais on a aussi :

$$z + \lambda z' = \operatorname{Re}(z+\lambda z') + i\operatorname{Im}(z+\lambda z')$$

On en déduit les formules annoncées par unicité de la forme algébrique du nombre complexe $z + \lambda z'$. ■

Remarques :

- ⋆ C'est faux pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Par exemple :

$$0 = \operatorname{Im}(i^2) \neq i\operatorname{Im}(i) = i$$

- ⋆ En général :

$$\operatorname{Re}(zz') \neq \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z') \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Re}\left(\frac{z}{z'}\right) \neq \frac{\operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Re}(z')} \qquad \text{(idem pour la partie imaginaire)}$$

Exemple La forme algébrique du nombre complexe $z = (1+i\sqrt{3})^2$ est $-2+2i\sqrt{3}$.

2) Sommes de nombres complexes

Toutes les propriétés vu dans le chapitre sur les sommes/produits (chapitre 4) restent valables avec des nombres complexes. On pourrait par exemple démontrer que :

- ⋆ si $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, alors pour tous $(p,q) \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant q$, on a l'égalité :

$$\sum_{k=p}^{q} x^k = x^p \times \frac{1-x^{q-p+1}}{1-x}$$

- ⋆ pour tous $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a la factorisation :

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

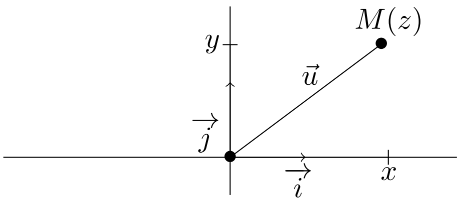
- ⋆ **formule du binôme de Newton :** pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $a, b \in \mathbb{C}$, on a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

3) Le plan complexe : entre image et affixe

On munit le plan usuel d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

- Si $z \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe, on appelle *image* de z le point M du plan de coordonnées $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$.
- Si $M(x, y)$ est un point du plan (respectivement si $\vec{v} = (x, y)$ est un vecteur du plan), on appelle affixe du point M (respectivement de $\vec{v}$) le nombre complexe $z = x + iy$.



Ceci nous permet d'identifier $\mathbb{C}$ avec le plan muni du repère $\left(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (on parle de *plan complexe*).

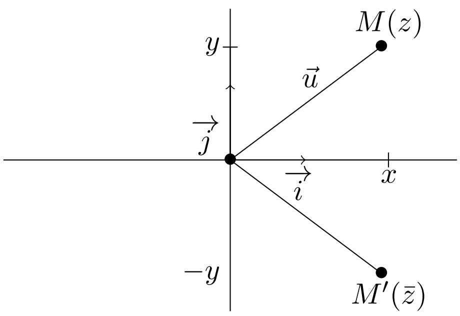
4) Conjugaison

Définition Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle *conjugué* de z, noté $\overline{z}$, le nombre complexe :

$$\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$$

Exemple $\overline{1+2i} = 1 - 2i$, $\overline{4} = 4$, $\overline{-i} = i$

Remarque : Si M est le point d'affixe z et si M' est le point d'affixe $\overline{z}$ alors les points M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses dans le plan complexe.



Proposition Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, on a :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} \in \mathbb{C}$$

Démonstration Il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur par $\overline{z}$. ■

✎✎✎ **Exercice** Déterminer la forme algébrique des nombres complexes $z = \dfrac{1}{3+2i}$ et $w = \dfrac{2-i}{1-5i}$.

Proposition (propriétés de la conjugaison) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors :

- $\star$ $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$
- $\star$ $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$
- $\star$ $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\star$ $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
- $\star$ $\overline{\overline{z}} = z$
- $\star$ si $z \neq 0$, $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$

Démonstration Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Il existe $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$ tels que $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$.

$\star$ On a :

$$\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{x+iy+x-iy}{2} = x = \mathrm{Re}(z) \qquad \text{et} \qquad \frac{z-\overline{z}}{2i} = \frac{x+iy-x+iy}{2i} = y = \mathrm{Im}(z)$$

$\star$ Ensuite :

$$\overline{z+z'} = \overline{(x+x')+i(y+y')} = (x+x') - i(y+y') = (x-iy)+(x'-iy') = \overline{z}+\overline{z'}$$

et :

$$\overline{zz'} = \overline{(xx'-yy')+i(xy'+x'y)} = (xx'-yy') - i(xy'+x'y) = (x-iy)(x'-iy') = \overline{z} \times \overline{z'}$$

ce qui implique que, si $z' \neq 0$:

$$\overline{z'} \times \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{z' \times \frac{z}{z'}} = \overline{z} \qquad \text{donc} \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

$\star$ L'égalité $\overline{\overline{z}} = z$ est immédiate. ■

Théorème (caractérisation des réels et des imaginaires purs) Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

1. $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$
2. $z + \overline{z} = 0 \iff z \in i\mathbb{R}$ (*i.e.* z est un imaginaire pur)

Démonstration C'est une conséquence directe des deux premiers points de la proposition précédente. ■

Remarque : ce théorème est utile en pratique pour montrer qu'un nombre est réel ou imaginaire pur.

Exemple Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$. Donnons une condition nécessaire et suffisante sur z pour que le nombre complexe $Z = \dfrac{z+2}{z+1}$ soit un nombre réel. On a :

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z \iff \frac{\overline{z}+2}{\overline{z}+1} = \frac{z+2}{z+1} &\iff z\overline{z} + \overline{z} + 2z + 2 = z\overline{z} + 2\overline{z} + z + 2 \\ &\iff z = \overline{z} \end{aligned}$$

Ainsi, pour que Z soit un nombre réel, il faut et il suffit que z en soit un (différent de -1).

5) Module

Soit $z \in \mathbb{C}$. Remarquons que :

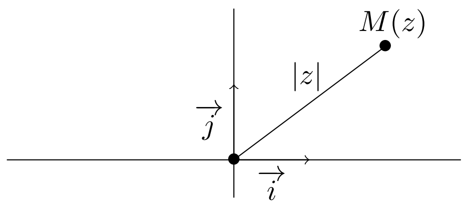
$$z\overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 \in \mathbb{R}_+$$

Définition Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit *le module de* z, noté $|z|$, le nombre réel positif :

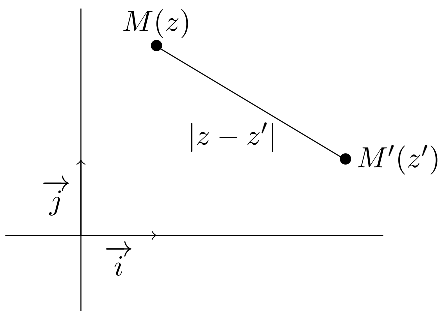
$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

Remarques :

- ⋆ On a donc aussi :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad |z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$$
Par exemple, $|2+i| = \sqrt{5}$.
- ⋆ Si $z \in \mathbb{R}$. Alors $|z| = \sqrt{z^2} = |z|$ (valeur absolue de z). Autrement dit, le module est un prolongement de la valeur absolue à l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
- ⋆ Dans le plan complexe, le module $|z|$ du nombre complexe z est égale à la longueur $OM(z)$, le point M désignant l'image de z.



- ⋆ Plus généralement, si z et z' sont deux nombres complexes, le module $|z - z'|$ est égale à la distance $M(z)M'(z')$.



En identifiant un point du plan avec son affixe, on peut définir les notions de cercle, disque fermé et disque ouvert du plan complexe.

Définition (cercle et disques du plan complexe) Soient A un point du plan complexe d'affixe $a \in \mathbb{C}$ et $R \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle :

- ⋆ cercle de centre A et de rayon R l'ensemble :
$$\mathscr{C}(A,R) = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z-a| = R \right\}$$
- ⋆ disque fermé de centre A et de rayon R l'ensemble :
$$\mathscr{D}_o(A,R) = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z-a| \leqslant R \right\}$$
- ⋆ disque ouvert de centre A et de rayon R l'ensemble :
$$\mathscr{D}_f(A,R) = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z-a| < R \right\}$$

✎✎✎ **Exercice** Pour tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que $\dfrac{2}{1+it}$ appartient au cercle de centre 1 et de rayon 1.

Proposition (propriétés du module) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors :

- ⋆ $|z| = 0 \iff z = 0$
- ⋆ $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$
- ⋆ $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$
- ⋆ $|zz'| = |z||z'|$
- ⋆ $z\bar{z} = |z|^2$
- ⋆ si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
- ⋆ $\left|\dfrac{1}{z'}\right| = \dfrac{1}{|z'|}$
- ⋆ $|z| = |\bar{z}|$

Démonstration Soient $z, z' \in \mathbb{C}$.

- ⋆ On a :
$$|z| = 0 \iff |z|^2 = 0 \iff \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = 0 \iff \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) = 0 \iff z = 0$$
- ⋆ On sait que $|z|^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + \underbrace{\mathrm{Im}(z)^2}_{\geqslant 0} \geqslant \mathrm{Re}(z)^2$ d'où le résultat par croissance de la fonction $t \longmapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+$;
- ⋆ On procède de la même manière pour la partie imaginaire.
- ⋆ On sait que $|zz'| = \sqrt{zz'\overline{zz'}}$ d'où le résultat par multiplicativité de la conjugaison et de la racine carrée.
- ⋆ Par définition du module, $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$, d'où le résultat en élevant au carré.
- ⋆ Le quatrième point nous donne $|z'| \times \left|\dfrac{z}{z'}\right| = |z'|$, d'où le résultat en divisant par $|z| \neq 0$.
- ⋆ Il suffit de prendre $z = 1$ au point précédent.
- ⋆ On a $|\bar{z}| = \sqrt{\bar{z}\,\bar{\bar{z}}} = |z|$ car $\bar{\bar{z}} = z$. ■

✎✎✎ **Exercice** Calculer le module des nombres complexes :

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}+i}, \qquad z_2 = (1 - i\sqrt{3})^4, \qquad z_3 = \frac{\sqrt{5}-i}{1-i}, \qquad z_4 = \frac{(1-i)^3}{(1+i)(i+\sqrt{2})}$$

Remarque : en général $|z + z'| \neq |z| + |z'|$ (prendre $z = -1$ et $z' = 1$ par exemple).

Proposition (Inégalité triangulaire) Soient $z, w \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\big||z| - |w|\big| \leqslant |z + w| \leqslant |z| + |w|$$

De plus, on a l'égalité $|z + w| = |z| + |w|$ si et seulement si les vecteurs du plan complexe d'affixes z et w sont colinéaires de même sens.

Rappels :

- ⋆ Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits *colinéaires* s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\vec{u} = \lambda\vec{v} \qquad \text{ou} \qquad \vec{v} = \lambda\vec{u}$$
Ils sont dits *colinéaires de même sens* si de plus $\lambda \geqslant 0$.
- ⋆ Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$.
- ⋆ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x \leqslant |x|$.

Démonstration Soient $z, w \in \mathbb{C}$.

⋆ Commençons par établir l'inégalité de droite. On a :

$$\begin{aligned}
\big(|z| + |w|\big)^2 - |z+w|^2 &= |z|^2 + |w|^2 + 2|z| \times \underbrace{|w|}_{=|\overline{w}|} - (z+w)\big(\overline{z} + \overline{w}\big) \\
&= |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| - \underbrace{z\overline{z}}_{=|z|^2} - \underbrace{w\overline{w}}_{=|w|^2} - \big(z\overline{w} + \overline{z}w\big) \\
&= 2|z\overline{w}| - \big(z\overline{w} + \overline{z\overline{w}}\big) \\
&= 2\big(|z\overline{w}| - \mathrm{Re}\big(z\overline{w}\big)\big)
\end{aligned}$$

Or on sait que $\big|\mathrm{Re}\big(z\overline{w}\big)\big| \leqslant |z\overline{w}|$ et que $\mathrm{Re}\big(z\overline{w}\big) \leqslant \big|\mathrm{Re}\big(z\overline{w}\big)\big|$ donc, par transitivité de la relation $\leqslant$, on a $\mathrm{Re}\big(z\overline{w}\big) \leqslant |z\overline{w}|$. Ceci montre que :

$$\big(|z| + |w|\big)^2 - |z+w|^2 \geqslant 0 \qquad \textit{i.e.} \qquad \big(|z| + |w|\big)^2 \geqslant |z+w|^2$$

La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et les nombres $|z| + |w|$ et $|z+w|$ sont positifs ou nuls donc $|z+w| \leqslant |z| + |w|$.

⋆ Démontrons maintenant l'inégalité de gauche. En utilisant ce qui précède, on a :

$$|z| = |(z+w) + (-w)| \leqslant |z+w| + |-w|$$

et comme $|-w| = |w|$, on obtient l'inégalité :

$$|z| - |w| \leqslant |z+w| \tag{$*$}$$

En échangeant les rôles joués par z et w, on a aussi :

$$|w| - |z| \leqslant |z+w| \qquad \textit{i.e.} \qquad -\big(|z| - |w|\big) \leqslant |z+w| \tag{$**$}$$

Les inégalités $(*)$ et $(**)$ impliquent que :

$$\max\big(|z| - |w|, -(|z| - |w|)\big) \leqslant |z+w| \qquad \text{soit encore} \qquad \big||z| - |w|\big| \leqslant |z+w|$$

par définition de la valeur absolue d'un nombre réel.

⋆ Il reste à étudier le cas d'égalité. Raisonnons par double implication.

— Supposons que $|z+w| = |z| + |w|$. D'après le calcul mené dans le premier point, on a l'égalité $|z\overline{w}| = \mathrm{Re}\big(z\overline{w}\big)$. Ceci implique que $\mathrm{Im}\big(z\overline{w}\big) = 0$ (en effet, $\mathrm{Im}(z\overline{w})^2 = |z\overline{w}|^2 - \mathrm{Re}(z\overline{w})^2$). Autrement dit, $z\overline{w}$ est un nombre réel donc :

$$z\overline{w} = \mathrm{Re}\big(z\overline{w}\big) = |z\overline{w}| \in \mathbb{R}_+$$

Si $w \neq 0$, on peut écrire que :

$$z = \frac{\overline{w}}{\overline{w}} w = \frac{z\overline{w}}{|w|^2} w$$

et le nombre $\dfrac{z\overline{w}}{|w|^2}$ est un réel positif. Donc les vecteurs d'affixes z et w sont colinéaires de même sens. Ceci reste vrai si $w = 0$ car alors $w = 0 \times z$ et $0 \in \mathbb{R}_+$.

— Réciproquement, supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z = \lambda w$ (ce qu'on peut supposer quitte à échanger les rôles de z et w). D'une part :

$$|z| + |w| = |\lambda w| + |w| = |\lambda|\,|w| + |w| = (\lambda + 1)|w|$$

car $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et d'autre part :

$$|z+w| = |(\lambda+1)w| = |\lambda + 1|\,|w| = (\lambda+1)|w|$$

car $\lambda + 1 \in \mathbb{R}_+$. On a donc bien l'égalité $|z+w| = |z| + |w|$. ■

II – Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

1) Définition et premières propriétés

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, c'est-à-dire :

$$\mathbb{U} = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = 1 \right\} \subset \mathbb{C}^*$$

Dans le plan complexe, on identifie $\mathbb{U}$ avec le cercle ce centre $O(0,0)$ et de rayon 1 (appelé *cercle trigonométrique*).

Remarques :

- ⋆ Pour tout $z \in \mathbb{U}$, on a $z \neq 0$ et l'égalité $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$ (car $|z|^2 = z\overline{z} = 1$).

Définition (notation $e^{i\theta}$) Pour tout réel θ, on définit le nombre complexe $e^{i\theta}$ par :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Remarques :

- ⋆ C'est une notation. Nous verrons que la fonction $\theta \in \mathbb{R} \longmapsto e^{i\theta}$ partage un certain nombre de propriétés vérifiées par l'exponentielle réelle, mais pas toutes (penser à la positivité).
- ⋆ On a donc :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \cos(\theta) = \mathrm{Re}(e^{i\theta}) \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \mathrm{Im}(e^{i\theta})$$

Exemple $e^{i\times 0} = 1$, $e^{i2\pi} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{i\frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Proposition (paramétrisation de $\mathbb{U}$) On a l'égalité :

$$\mathbb{U} = \left\{ e^{i\theta} \,\middle|\, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Démonstration On procède par double inclusion.

$\boxed{\supset}$ Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2} = 1$ donc :

$$\left\{ e^{i\theta} \,\middle|\, \theta \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{U}$$

$\boxed{\subset}$ Soit $z = x + iy \in \mathbb{U}$, où $x, y \in \mathbb{R}$. Alors $x^2 + y^2 = 1$ (par définition de $\mathbb{U}$), ce qui signifie que le point $M(x, y)$ appartient au cercle trigonométrique. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$. Ainsi, $z = e^{i\theta}$. Ceci fournit la deuxième inclusion.

On a donc l'égalité souhaitée. ∎

Proposition (propriétés algébriques de $e^{i\theta}$) Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}^2$, on a :

(i) $e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ $\qquad (ii)$ $e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}}$ $\qquad (iii)$ $e^{i(\theta-\theta')} = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$

(iv) $e^{i\theta} = 1 \iff \theta \equiv 0 \ [2\pi]$ $\qquad (v)$ $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \ [2\pi]$

Rappels.

★ Dans la démonstration de (i), nous utiliserons les deux identités suivantes qui seront démontrées dans le chapitre de trigonométrie :

$$\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, \qquad \left\{ \begin{array}{l} \cos(\theta+\theta') = \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') \\ \sin(\theta+\theta') = \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta') \end{array} \right.$$

★ Si $a, b \in \mathbb{R}$, on dit que a est congru à b modulo 2π s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + 2k\pi$. On note $a \equiv b\,[2\pi]$.

Démonstration Soient $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$.

(i) On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{i\theta} \times \mathrm{e}^{i\theta'} &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) \\ &= \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i(\cos(\theta)\sin(\theta') + \cos(\theta')\sin(\theta)) \\ &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') \\ &= \mathrm{e}^{i(\theta+\theta')} \end{aligned}$$

★ On en déduit que :

$$\mathrm{e}^{i\theta} \times \mathrm{e}^{-i\theta} = \mathrm{e}^{i(\theta-\theta)} = \mathrm{e}^{i\,0} = 1 \qquad \text{d'où l'on tire que} \qquad \mathrm{e}^{-i\theta} = \frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}$$

De plus, les fonctions cos et sin étant respectivement paire et impaire sur $\mathbb{R}$, on a aussi :

$$\mathrm{e}^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \overline{\mathrm{e}^{i\theta}}$$

(iii) De même :

$$\mathrm{e}^{i\theta'} \times \mathrm{e}^{i(\theta-\theta')} = \mathrm{e}^{i(\theta'+(\theta-\theta'))} = \mathrm{e}^{i\theta}$$

d'où (iii) en divisant par $\mathrm{e}^{i\theta'} \neq 0$.

(v) On utilise (iii) :

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta'} &\iff \frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta'}} = 1 \\ &\iff \mathrm{e}^{i(\theta-\theta')} = 1 \\ &\iff \cos(\theta-\theta') + i\sin(\theta-\theta') = 1 + i \times 0 \\ &\iff \cos(\theta-\theta') = 0 \text{ et } \sin(\theta-\theta') = 0 \qquad \text{(par unicité de la forme algébrique de } 1 \in \mathbb{C}) \\ &\iff \theta - \theta' \equiv 0\,[2\pi] \\ &\iff \theta \equiv \theta'\,[2\pi] \end{aligned}$$

On en déduit (iv) en choisissant $\theta' = 0$. ■

Remarques :

★ D'après le dernier point de la proposition, on a aussi :

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathrm{e}^{i\theta} \,\middle|\, \theta \in [0, 2\pi[\right\}$$

★ Le calcul mené dans le premier point permet de retrouver les formules relatives à $\cos(p \pm q)$ et $\sin(p \pm q)$.

2) Formules d'Euler et de Moivre

Proposition ★ **Formules d'Euler :**

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$$

★ **Formule de Moivre :**

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta},$$

i.e. :

$$\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Démonstration Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

⋆ Il suffit de faire le calcul :

$$\frac{\mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{e}^{-i\theta}}{2} = \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta) + \cos(\theta) - i\sin(\theta)}{2} = \cos(\theta)$$

et le calcul est analogue pour $\sin(\theta)$.

⋆ Commençons par démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta}$$

C'est clair pour $n = 0$ (les deux nombres mis en jeu dans l'identité précédente valant 1). Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta}$. Alors :

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^{n+1} = \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n \times \mathrm{e}^{i\theta} &= \mathrm{e}^{in\theta} \times \mathrm{e}^{i\theta} && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \mathrm{e}^{i(n\theta+\theta)} && \text{(propriété de } \varphi \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{i\varphi}) \\ &= \mathrm{e}^{i(n+1)\theta} \end{aligned}$$

L'égalité est donc vraie au rang $n + 1$. Par principe de récurrence simple, on a bien :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \mathrm{e}^{in\theta}$$

Soit maintenant $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} \left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^n = \left(\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^{-1}\right)^{-n} = \left(\frac{1}{\mathrm{e}^{i\theta}}\right)^{-n} &= \frac{1}{\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^{-n}} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}^{i(-n\theta)}} && \text{(car } -n \in \mathbb{N}) \\ &= \mathrm{e}^{n\theta} \end{aligned}$$

La formule de Moivre est donc établie. ■

3) À quoi servent ces formules ?

Ces trois formules (d'Euler et de Moivre) sont très utiles en pratique. Elles permettent de linéariser, d'*anti*-linéariser, d'avoir recours à la technique dite de l'angle moitié et de calculer des sommes trigonométriques

(a) à linéariser

Linéariser, c'est transformer une expression de la forme $\cos(x)^m \sin(y)^n$ (où $m, n \in \mathbb{N}$) en une expression de la forme $\sum_{p,q} (\alpha_p \cos(px_p) + \beta_q \sin(qx_q))$. L'intérêt, c'est qu'il n'y plus d'exposant dans l'expression obtenue. La méthode est toujours la même :

(*i*) on applique les formules d'Euler ;
(*ii*) ensuite on développe l'expression obtenue (en utilisant éventuellement la formule du binôme de Newton et la formule de Moivre) ;
(*iii*) puis en regroupe les termes par paires et on applique à nouveau les formules d'Euler (*à l'envers*).

Exemple Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéarisons $\cos(\theta)^3$. On a :

$$\begin{aligned} \cos(\theta)^3 &= \left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2}\right)^3 && \text{(formule d'Euler pour le cosinus)} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{i3\theta} + 3\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta} + \mathrm{e}^{-i3\theta}}{8} && \text{(formule de Moivre)} \\ &= \frac{2\cos(3\theta) + 6\cos(\theta)}{8} && \text{(formule de Moivre pour le cosinus)} \\ &= \frac{\cos(3\theta)}{4} + \frac{3\cos(\theta)}{4} \end{aligned}$$

Exemple d'application : calculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)^3 \,\mathrm{d}\theta$.

(b) à *anti*-linéariser

Il s'agit ici d'exprimer une expression de la forme $\cos(n\theta)$ ou $\sin(n\theta)$ (où $(n,\theta) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{R}$) en un polynôme en $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Exemple Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimons $\cos(3\theta)$ comme un polynôme en $\cos(\theta)$.
D'après la formule de Moivre :

$$\cos(3\theta) = \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{i3\theta}\big) = \mathrm{Re}\big((\mathrm{e}^{i\theta})^3\big)$$

et :

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^{i\theta})^3 &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^3 \\ &= \underbrace{\cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)\sin(\theta)^2}_{\in\mathbb{R}} + i\underbrace{\big(3\cos(\theta)^2\sin(\theta) - \sin(\theta)^3\big)}_{\in\mathbb{R}}\end{aligned}$$

donc :

$$\cos(3\theta) = \cos(\theta)^3 - 3\cos(\theta)\sin(\theta)^2$$

Plus généralement, on a le résultat suivant (qu'il faut savoir redémontrer pour n quelconque ou pour une valeur de n particulière).

Proposition (anti-linéarisation) Pour tout $(n,\theta) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}$, on a :

$$\cos(n\theta) = \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n} \binom{n}{2p} \cos(\theta)^{n-2p}(-1)^p \sin(\theta)^{2p}$$

et :

$$\sin(n\theta) = \sum_{0\leqslant 2p+1\leqslant n} \binom{n}{2p+1} \cos(\theta)^{n-2p-1}(-1)^p \sin(\theta)^{2p+1}$$

Démonstration Soit $(n,\theta) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}$. D'après la formule de Moivre, on a :

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) &= (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(\theta)^{n-k} i^k \sin(\theta)^k\end{aligned}$$

en utilisant la formule du binôme de Newton. Par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe, on conclut donc que :

$$\cos(n\theta) = \sum_{0\leqslant 2p\leqslant n} \binom{n}{2p} \cos(\theta)^{n-2p}(-1)^p \sin(\theta)^{2p}$$

et :

$$\sin(n\theta) = \sum_{0\leqslant 2p+1\leqslant n} \binom{n}{2p+1} \cos(\theta)^{n-2p-1}(-1)^p \sin(\theta)^{2p+1}$$

car $i^{2p+1} = (-1)^p i$. ■

(c) Technique de l'angle moitié

La technique est contenue dans la démonstration du résultat suivant, qu'il faut savoir reproduire.

Proposition Soient $p, q \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\mathrm{e}^{ip} - \mathrm{e}^{iq} = 2i\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}, \qquad \mathrm{e}^{ip} + \mathrm{e}^{iq} = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}$$

et :

$$1 - \mathrm{e}^{iq} = -2i\sin\left(\frac{q}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{q}{2}}, \qquad 1 + \mathrm{e}^{iq} = 2\cos\left(\frac{q}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{q}{2}}$$

Démonstration Soit $p, q \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\mathrm{e}^{ip} - \mathrm{e}^{iq} = \mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}} \left(\mathrm{e}^{i\frac{p-q}{2}} - \mathrm{e}^{i\frac{q-p}{2}} \right) = 2i \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}$$

d'après la formule d'Euler pour le sinus. La deuxième identité se démontre de manière analogue (en utilisant cette fois la formule d'Euler pour le cosinus). Le choix $p = 0$ fournit enfin les deux dernières identités. ■

Ce résultat nous permet de factoriser $\cos(p) \pm \cos(q)$ et $\sin(p) \pm \sin(q)$.

Corollaire Pour tous $p, q \in \mathbb{R}$, on a les identités :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

et :

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Démonstration Soit $p, q \in \mathbb{R}$. En explicitant $\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}$ dans la proposition précédente, on a :

$$\mathrm{e}^{ip} - \mathrm{e}^{iq} = 2i\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Par ailleurs :

$$\mathrm{e}^{ip} - \mathrm{e}^{iq} = (\cos(p) - \cos(q)) + i(\sin(p) - \sin(q))$$

donc, par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe, on obtient bien les deux dernières identités. ■

(d) à calculer des sommes trigonométriques

Les techniques précédentes permettent également de calculer des sommes comme dans l'exemple ci-dessous.

Exemple Soit $(n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Calculons les sommes :

$$C_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \qquad \text{et} \qquad S_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

En posant $E_n(\theta) = C_n(\theta) + iS_n(\theta)$, on a par linéarité de la somme :

$$E_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} (\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ik\theta}$$

On distingue ensuite deux cas :

- ⋆ **Premier cas : $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$**
  Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $k\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ donc $\mathrm{e}^{ik\theta} = 1$ d'où $E_n = n + 1$. Par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe, on a alors :

$$C_n(\theta) = n + 1 \qquad \text{et} \qquad S_n(\theta) = 0$$

- ⋆ **Deuxième cas : $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$**

Alors $e^{i\theta} \neq 1$ donc (en utilisant la formule de Moivre et la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{i\theta} \neq 1$) :

$$\begin{aligned}
E_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k &= \frac{1-\left(e^{i\theta}\right)^{n+1}}{1-e^{i\theta}} \\
&= \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} \\
&= \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \times \frac{-2i\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= e^{i\frac{n\theta}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
&= \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} + i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}
\end{aligned}$$

Par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe, on peut donc conclure que :

$$C_n(\theta) = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \qquad \text{et} \qquad S_n(\theta) = \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

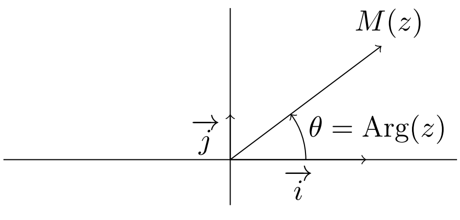
III – Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1) Argument d'un nombre complexe non nul

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Le nombre complexe $\frac{z}{|z|}$ est de module 1 (puisque $\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$), *i.e.* $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$.

Définition (argument) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle argument de z tout nombre réel θ tel que :

$$z = |z|\, e^{i\theta}$$



Un argument de z est une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OM(z)}\right)$, où $M(z)$ est l'image de z dans le plan complexe.

Remarques :

- ⋆ Par convention, le nombre complexe 0 n'admet pas d'argument.
- ⋆ Il n'y a pas unicité de l'argument : par exemple $1 = e^{i\times 0} = e^{i2\pi}$ donc 0 et 2π sont deux arguments du nombre complexe 1.

Proposition (ensemble des arguments d'un nombre complexe non nul) Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et θ un argument de z. L'ensemble des arguments de z est :

$$\{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

L'unique argument de z appartenant à l'intervalle $]-\pi,\pi]$ est appelé *détermination principale de l'argument* de z.

Démonstration Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Notons $\mathscr{A}_z$ l'ensemble des arguments de z (en particulier, on a $\theta \in \mathscr{A}_z$). Soit $\varphi \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
\varphi \in \mathscr{A}_z \iff z = |z|\,\mathrm{e}^{i\varphi} &\iff |z|\,\mathrm{e}^{i\theta} = |z|\,\mathrm{e}^{i\varphi} \qquad (\text{car } \theta \in \mathscr{A}_z)\\
&\iff \mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\varphi} \qquad (\text{puisque } |z| \neq 0 \text{ puisque } z \in \mathbb{C}^*)\\
&\iff \theta \equiv \varphi\,[2\pi]\\
&\iff \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \varphi = \theta + 2k\pi
\end{aligned}$$

■

Ainsi :

$$\mathscr{A}_z = \{\varphi \in \mathbb{R} \mid \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \varphi = \theta + 2k\pi\} = \{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Notation. Si $z \in \mathbb{C}^*$ et si θ est un argument de z, on écrira $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$.

Remarque : pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$z \in \mathbb{R} \iff \arg(z) \equiv 0\ [\pi] \qquad \text{et} \qquad z \in i\mathbb{R} \iff \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

Exemple

- ⋆ $\arg(1) \equiv 0\ [2\pi]$
- ⋆ $\arg(i) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$
- ⋆ Soit $z = \sqrt{3} + i$. Alors (en factorisant z par son module) :

$$z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}},$$

  donc $\arg(z) \equiv \dfrac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

Définition (forme trigonométrique) Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ un argument de z. L'écriture :

$$z = |z|\,\mathrm{e}^{i\theta}$$

s'appelle la forme trigonométrique de z.

Exemple

- ⋆ La forme trigonométrique de $z = 1$ est $z = 1 \times \mathrm{e}^{i0}$.
- ⋆ La forme trigonométrique de $z = i$ est $z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$.
- ⋆ La forme trigonométrique de $z = \sqrt{3} + i$ est $z = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$.

Remarques :

- ⋆ Par convention, le nombre complexe 0 n'admet pas de forme trigonométrique.

★ Soit $z \in \mathbb{C}^*$. S'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, alors cette écriture est la forme trigonométrique de z. En effet :
$$|z| = |r|\,\left|\mathrm{e}^{i\theta}\right| = r$$
car $r \in \mathbb{R}_+$ et $\mathrm{e}^{i\theta} \in \mathbb{U}$.

✎✎✎ **Exercice** Écrire les nombres complexes sous forme trigonométrique :
$$a = -4\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}, \qquad b = 3-3i, \qquad c = \frac{1-\sqrt{3}i}{1+i} \qquad \text{et} \qquad d = 1+\mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}}$$

Proposition (propriétés de l'argument) Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$. Alors :
- ★ $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$;
- ★ $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$;
- ★ $\forall n \in \mathbb{Z},\ \arg(z^n) \equiv n \times \arg(z)\ [2\pi]$.

Démonstration Notons θ et θ' des arguments respectifs de z et z'.

★ On détermine la forme trigonométrique de zz' en utilisant celles de z et z' :
$$zz' = \left(|z|\,\mathrm{e}^{i\theta}\right)\left(|z'|\,\mathrm{e}^{i\theta'}\right) = (|z|\,|z'|) \times \left(\mathrm{e}^{i\theta}\,\mathrm{e}^{i\theta'}\right) = |zz'|\,\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$$
Ainsi, $\theta+\theta'$ est un argument de zz' donc :
$$\arg(zz') \equiv \theta+\theta'\ [2\pi] \qquad \textit{i.e.} \qquad \arg(zz') \equiv \arg(z)+\arg(z')\ [2\pi]$$

★ Pour les deux autres points, on peut procéder de la même manière en déterminant les formes trigonométriques de $\dfrac{z}{z'}$ et z^n. ■

Proposition Soient $r, r' \in \mathbb{R}_+$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Alors :
$$r\,\mathrm{e}^{i\theta} = r'\,\mathrm{e}^{i\theta'} \iff \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta'\ [2\pi] \end{cases}$$

Démonstration Soient $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$. Alors :
$$\begin{aligned} r\,\mathrm{e}^{i\theta} = r'\,\mathrm{e}^{i\theta'} \iff \begin{cases} r\,\mathrm{e}^{i\theta} = r'\,\mathrm{e}^{i\theta'} \\ |r\,\mathrm{e}^{i\theta}| = |r'\,\mathrm{e}^{i\theta'}| \end{cases} &\iff \begin{cases} r'\,\mathrm{e}^{i\theta} = r'\,\mathrm{e}^{i\theta'} \\ r = r' \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{i\theta'} \\ r = r' \end{cases} \qquad (\text{car } r' \neq 0) \\ &\iff \begin{cases} \theta \equiv \theta'\ [2\pi] \\ r = r' \end{cases}, \end{aligned}$$
ce qu'il fallait démontrer. ■

IV – Équations algébriques

1) Équations produit-nul

Proposition (intégrité de $\mathbb{C}$) Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, on a :

$$zw = 0 \iff z = 0 \text{ ou } w = 0$$

Démonstration Soient $z, w \in \mathbb{C}$. On raisonne par double implication.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $zw = 0$. Montrons que $z = 0$ ou $w = 0$.

— Si $z = 0$, alors il n'y a rien à démontrer.

— Si $z \neq 0$, alors $\dfrac{1}{z}$ est un nombre complexe bien défini donc :

$$zw = 0 \Longrightarrow \frac{1}{z} \times zw = \frac{1}{z} \times 0 \Longrightarrow w = 0$$

Dans les deux cas, on a bien $z = 0$ ou $w = 0$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement, si $z = 0$ ou $w = 0$, alors il est clair que $zw = 0$. ■

Remarque : on dit que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est (un anneau) *intègre* (*cf.* chapitre 11 sur les structures algébriques).

2) Trinômes du second degré à coefficients complexes

On sait résoudre une équation du second degré à coefficients *réels*, c'est-à-dire :

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{où} \qquad (a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$$

Nous allons ici considérer des coefficients a, b et c *complexes*.

(a) Racine carrée d'un nombre complexe

Définition (racine carrée d'un nombre complexe) Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle *racine carrée* de z tout nombre complexe a tel que $a^2 = z$.

Exemple ⋆ Une racine carrée de 1 est -1 ou 1.

- ⋆ Une racine carrée de -1 est $-i$ ou i.
- ⋆ Une racine carrée de i est $-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ ou $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$.
  En effet, pour tout $a \in \mathbb{C}$, on a :

$$a^2 = i \iff a^2 = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} \iff a^2 = \left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 \iff \left(a - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right)\left(a + \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right) = 0$$
$$\iff a = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \text{ ou } a = -\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$$

  par intégrité de $\mathbb{C}$.

Remarques :

- ⋆ On n'écrira jamais « $\sqrt{z}$ » pour $z \in \mathbb{C}$, à moins que z soit un élément de $\mathbb{R}_+$ bien sûr.
- ⋆ Le nombre complexe 0 admet une et une seule racine carrée : lui-même. En effet :

$$\forall a \in \mathbb{C}, \qquad a^2 = 0 \iff a = 0$$

  par intégrité de $\mathbb{C}$.
- ⋆ On peut démontrer qu'un nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées.

Comment détermine-t-on les racines carrées d'un nombre complexe z ?

- **Première méthode :** (*si l'on sait déterminer la forme trigonométrique de z*)
  On suppose ici qu'on sait écrire z sous la forme $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Étant donné $a \in \mathbb{C}$, on écrit alors que :

$$\begin{aligned} a^2 = z \iff a^2 = r\,\mathrm{e}^{i\theta} &\iff a^2 = \left(\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 \qquad \text{(formule de Moivre)} \\ &\iff \left(a - \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\right)\left(a + \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 0 \\ &\iff a = \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} \text{ ou } a = -\sqrt{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

  par intégrité de $\mathbb{C}$.

  Exemple Déterminons les racines carrées de $z = 1 + i$.
  Soit $a \in \mathbb{C}$. On résout :

$$\begin{aligned} a^2 = 1 + i \iff a^2 = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} &\iff a^2 = \left(2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}\right)^2 \\ &\iff \left(a - 2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}\right)\left(a + 2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}\right) = 0 \\ &\iff a = -2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}} \text{ ou } a = 2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}} \end{aligned}$$

  Ainsi, les racines carrées de $1 + i$ sont $\pm\, 2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{8}}$.

- **Deuxième méthode :** (*on ne dispose que de la forme algébrique de z*)
  Il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $z = x + iy$. On se donne $a \in \mathbb{C}$ que l'on écrit sous forme algébrique : il existe $X, Y \in \mathbb{R}$ tels que $a = X + iY$. On a alors :

$$\begin{aligned} a^2 = z \iff \begin{cases} a^2 = z \\ |a|^2 = |z| \end{cases} &\iff \begin{cases} (X^2 - Y^2) + 2iXY = x + iy \\ X^2 + Y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} X^2 - Y^2 = x \\ X^2 + Y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \\ 2XY = y \end{cases} \end{aligned}$$

  Les deux premières équations nous permettent d'obtenir X^2 et Y^2 (et donc X et Y), la deuxième nous permet de déterminer Y à partir de X (puisque le signe de y est celui de XY).

  Exemple Déterminons (à nouveau) les racines carrées de $z = 1 + i$.
  Soit $a = X + iY \in \mathbb{C}$ (où $X, Y \in \mathbb{R}$). Alors :

$$a^2 = 1 + i \iff \begin{cases} a^2 + 1 + i \\ |a|^2 = \sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} X^2 - Y^2 = 1 \\ X^2 + Y^2 = \sqrt{2} \\ 2XY = 1 \end{cases}$$

  par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe. Ainsi :

$$a^2 = 1 + i \iff \begin{cases} X = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} \text{ et } Y = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} \\ 2XY = 1 \end{cases}$$

  D'après la deuxième équation, X et Y sont de même signe donc les racines carrées de $z = 1 + i$ sont :

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \qquad \text{et} \qquad -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

(b) Équations du second degré

On peut désormais énoncer le résultat sur les équations du second degré à coefficients complexes.

Proposition (équations du second degré à coefficients complexes) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$. On considère l'équation du second degré :

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{E}$$

d'inconnue z et on pose $\Delta = b^2 - 4ac$ (appelé *discriminant de* (E)).

- ⋆ si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une unique solution (complexe a priori), à savoir $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$$

- ⋆ si $\Delta \neq 0$, alors (E) admet exactement deux solutions (complexes a priori) distinctes, à savoir :

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$$

où δ est *une* racine carrée de Δ et :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$$

Remarque : bien entendu, ce résultat généralise celui bien connu pour les équations à coefficients réels.

Démonstration Soit $z \in \mathbb{C}$. On écrit le trinôme du second degré $az^2 + bz + c$ sous forme canonique pour résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} z \text{ est solution de (E)} &\iff z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0 \qquad (\text{car } a \neq 0) \\ &\iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \\ &\iff \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 \\ &\iff z + \frac{b}{2a} = -\frac{\delta}{2a} \qquad \text{ou} \qquad z + \frac{b}{2a} = \frac{\delta}{2a}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

Exemple Considérons l'équation du second degré $z^2 - (1 + 2i)z + i - 1 = 0$. Le discriminant Δ de cette équation vaut :

$$\Delta = (1 + 2i)^2 - 4(i - 1) = 1 \neq 0$$

donc les racines cherchées (complexes) sont $1 + i$ et i.

(c) Relations coefficients-racines

Proposition (relations coefficients-racines) Soient $s, p \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\forall x, y \in \mathbb{C}, \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & s \\ xy & = & p \end{array} \right. \iff (x \text{ et } y \text{ sont racines de } z^2 - sz + p = 0)$$

Démonstration Soient $s, p, x, y \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{aligned}(x, y \text{ sont solutions dans } \mathbb{C} \text{ de l'équation } z^2 - sz + p) &\iff \big(\forall z \in \mathbb{C},\ z^2 - sz + p = (z-x)(z-y)\big)\\ &\iff \big(\forall z \in \mathbb{C},\ z^2 - sz + p = z^2 - (x+y)z + xy\big)\\ &\iff s = x + y \text{ et } p = xy\end{aligned}$$

par unicité des coefficients d'un polynôme. ■

Exemple Les solutions dans $\mathbb{C}^2$ du système $\begin{cases} x+y = 1+2i \\ xy = 1-i \end{cases}$ sont $(1+i, i)$ et $(i, 1+i)$.

3) Racines n^{e} d'un nombre complexe

Soit n un entier naturel non nul fixé.

Définition (racine n^{e} d'un nombre complexe, racine de l'unité)

- ⋆ Soit $z \in \mathbb{C}$. On dit que $a \in \mathbb{C}$ est une racine n^{e} de z si $a^n = z$.
- ⋆ Une racine n^{e} de 1 est appelée une racine n^{e} de l'unité. L'ensemble des racines n^{e} de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$. On a donc :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z^n = 1 \right\}$$

Remarques :

- ⋆ Le nombre complexe 0 a une seule racine n^{e}, à savoir 0.
- ⋆ On a l'inclusion $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$.
  En effet, pour tout $z \in \mathbb{U}_n$, on a $z^n = 1$ donc $|z|^n = 1 = 1^n$ donc, par injectivité (stricte croissance de la fonction) $x \longmapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$ (et puisque $|z|, 1 \in \mathbb{R}_+$), on a $|z| = 1$.

Proposition (description des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \,\middle|\, k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

L'ensemble $\mathbb{U}_n$ contient n éléments.

Démonstration On remarque que 0 n'est pas une racine n^{e} de 1 (*i.e.* $0 \notin \mathbb{U}_n$) car $0^n = 0 \neq 1$ (puisque $n \geqslant 1$). Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$. Ainsi (d'après la formule de Moivre) :

$$\begin{aligned} z^n = 1 \iff r^n\,\mathrm{e}^{in\theta} = 1 = 1 \times \mathrm{e}^{i\,0} &\iff \begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta \equiv 0\,[2\pi] \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} r = 1 \\ \exists\, k \in \mathbb{Z},\ n\theta = 2k\pi \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} r = 1 \\ \exists\, k \in \mathbb{Z},\ \theta = \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases}\end{aligned}$$

Ceci montre que :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \exists\, k \in \mathbb{Z},\ z = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \right\} = \left\{ \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Il reste à montrer que :

$$\mathbb{U}_n = \underbrace{\left\{ \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \,\middle|\, k \in [\![0, n-1]\!] \right\}}_{\text{ensemble noté } E}$$

On raisonne par double inclusion.

- ⋆ L'inclusion $A \subset \mathbb{U}_n$ est évidente.
- ⋆ Soit maintenant $z \in \mathbb{U}_n$. Il existe alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}$. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe $q \in \mathbb{Z}$ et $r \in [\![0, n-1]\!]$ tels que $k = nq + r$. Ainsi :
$$z = \mathrm{e}^{i\frac{2(nq+r)\pi}{n}} = \left(\mathrm{e}^{i2\pi}\right)^q \mathrm{e}^{\frac{2ir\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{2ir\pi}{n}}$$
donc $z \in E$. Ceci montre l'inclusion $\mathbb{U}_n \subset A$.

Par double inclusion, on a bien $\mathbb{U}_n = A$.

Il reste à vérifier que les éléments de A sont deux à deux distincts. Soient $k, \ell \in [\![0, n-1]\!]^2$. On suppose que $\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} = \mathrm{e}^{i\frac{2\ell\pi}{n}}$. Alors $\dfrac{2k\pi}{n} = \dfrac{2\ell\pi}{n} \equiv 0\,[2\pi]$, c'est-à-dire $k \equiv \ell\ [1]$. Comme k et ℓ sont des entiers, cela implique que $k = \ell$. ■

Remarques :

- ⋆ Posons $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$. Alors :
$$\mathbb{U}_n = \left\{\xi^k \,\middle|\, k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$$
- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Alors :
$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = 0$$

Démonstration Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Posons $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$. Comme $n \geqslant 2$, on a $\dfrac{2\pi}{n} \in]0, \pi]$ donc $\dfrac{2\pi}{n} \not\equiv 0\,[2\pi]$ puis $\omega \neq 1$. Par conséquent :
$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \omega^0 \times \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} = 0$$
car, d'après la formule de Moivre, on a $\omega^n = \mathrm{e}^{2i\pi} = 1$. ■

Exemple ⋆ $\mathbb{U}_1 = \{1\}$

- ⋆ $\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$
- ⋆ $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$ où $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$ et donc $1 + j + j^2 = 0$ (et $\overline{j} = j^2$)
- ⋆ $\mathbb{U}_4 = \{-1, 1, -i, i\}$
- ⋆ $\mathbb{U}_6 = \left\{1, \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}, \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}, -1, \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}}, \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{3}}\right\}$

Géométriquement, les images des éléments de $\mathbb{U}_n$ dans le plan complexe forment un polygone régulier à n côtés.

Proposition (racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe écrit sous forme trigonométrique)
Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$. Les racines $n^{\text{èmes}}$ de z sont les nombres complexes de la forme $\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{n}}\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k \in [\![0, n-1]\!]$.

Démonstration Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Alors :
$$\begin{aligned}
a \text{ est une racine } n^{\text{e}} \text{ de } z &\iff a^n = 1 = \left(\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n \\
&\iff \left(\frac{a}{\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{n}}}\right)^n = 1 \\
&\iff \frac{a}{\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{n}}} \in \mathbb{U}_n \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{a}{\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{n}}} = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \\
&\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ a = \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{n}}\,\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}},
\end{aligned}$$
d'où le résultat annoncé. ■

Exemple Les racines *cubiques* de 2 sont $\sqrt[3]{2}$, $j\sqrt[3]{2}$ et $j^2\sqrt[3]{2}$.

V – Exponentielle complexe

Définition (exponentielle d'un nombre complexe) Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle *exponentielle de* z, notée e^z (ou $\exp(z)$), le nombre complexe :

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)} \times \mathrm{e}^{i\,\mathrm{Im}(z)}$$

Remarque : l'exponentielle *complexe* est donc définie à partir de l'exponentielle réelle et de l'exponentielle $\mathrm{e}^{i\theta}$.

Proposition (propriétés de l'exponentielle complexe) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors :

(i) $\overline{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{\overline{z}}$;

(ii) $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$ et $\arg(\mathrm{e}^z) \equiv \mathrm{Im}(z)\ [2\pi]$;

(iii) $\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^z \times \mathrm{e}^{z'}$;

(iv) $\mathrm{e}^z \neq 0$, $\dfrac{1}{\mathrm{e}^z} = \mathrm{e}^{-z}$ et $\dfrac{\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^{z'}} = \mathrm{e}^{z-z'}$;

(v) $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \iff z \equiv z'\,[2i\pi]$ et, en particulier, $\mathrm{e}^z = 1 \iff z \equiv 0\,[2i\pi]$.

Démonstration Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ que l'on écrit sous forme algébrique : il existe x, x', y, y' tels que $z = x+iy$ et $z' = x' + iy'$.

(i) On utilise les propriétés de l'exponentielle réelle et de $\theta \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{i\theta}$:

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{e}^z} = \overline{\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{iy}} = \overline{\mathrm{e}^x} \times \overline{\mathrm{e}^{iy}} &= \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{-iy} \qquad (\text{car } \mathrm{e}^x \in \mathbb{R})\\ &= \mathrm{e}^{\overline{z}}\end{aligned}$$

par définition de l'exponentielle de $\overline{z} = x + i(-y)$.

(ii) Par définition, $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{iy}$ est la forme trigonométrique de e^z (car $\mathrm{e}^x \in \mathbb{R}_+^*$), d'où (ii).

(iii) En utilisant à nouveau les propriétés de l'exponentielle réelle et de $\theta \in \mathbb{R} \longmapsto \mathrm{e}^{i\theta}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{z+z'} = \mathrm{e}^{(x+y)+i(y+y')} &= \mathrm{e}^{x+x'} \times \mathrm{e}^{i(y+y')} \qquad (\text{définition de l'exponentielle complexe})\\ &= \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{x'} \times \mathrm{e}^{iy} \times \mathrm{e}^{iy'}\\ &= \left(\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^{iy}\right)\left(\mathrm{e}^{x'} \times \mathrm{e}^{iy'}\right)\\ &= \mathrm{e}^z \times \mathrm{e}^{z'}\end{aligned}$$

en utilisant à nouveau la définition de l'exponentielle complexe.

(iv) En utilisant (iii), on a :

$$\mathrm{e}^{-z} \times \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^0 = \mathrm{e}^0 \times \mathrm{e}^{i\,0} = 1 \times 1 = 1$$

donc $\mathrm{e}^z \neq 0$ et $\mathrm{e}^{-z} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^z}$. La deuxième identité s'en déduit.

(*iv*) Par identification des formes trigonométriques, on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{z'} &\iff \mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^{x'} \times \mathrm{e}^{iy'} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{c} \mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{x'} \\ y \equiv y' \; [2\pi] \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{c} x = x' \\ y \equiv y' \; [2\pi] \end{array} \right. \qquad \text{(injectivité de l'exponentielle réelle sur } \mathbb{R}\text{)} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{c} x = x' \\ \exists\, k \in \mathbb{Z},\;\; y = y' + 2k\pi \end{array} \right. \\
&\iff \exists\, k \in \mathbb{Z},\;\; x + iy = x' + i(y' + 2k\pi) \\
&\iff \exists\, k \in \mathbb{Z},\;\; z = z' + 2ik\pi \\
&\iff z \equiv z' \; [2i\pi],
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. Pour le cas particulier, il suffit de choisir $z' = 0$. ■

Remarque : l'application exp : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \mathrm{e}^{z} \end{array} \right.$ n'est donc ni surjective (0 n'admettant pas d'antécédent), ni injective.

Proposition L'application exp : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & \mathrm{e}^{z} \end{array} \right.$ est surjective. Plus précisément, pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, on a :

$$\exp^{-1}(\{a\}) = \left\{ \ln(|a|) + i(\theta + 2k\pi) \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Démonstration On sait déjà que la fonction exp est à valeurs dans $\mathbb{C}^*$. Soit maintenant $a \in \mathbb{C}^*$. En notant θ un argument de a, on a :

$$a = |a|\, \mathrm{e}^{i\theta} = \mathrm{e}^{\ln(|a|) + i\theta}$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a alors (en utilisant la proposition précédente) :

$$\begin{aligned}
\exp(z) = a \iff \mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{\ln(|a|) + i\theta} &\iff z \equiv \ln(|a|) + i\theta \; [2i\pi] \\
&\iff \exists\, k \in \mathbb{Z},\;\; z = \ln(|a|) + i(\theta + 2k\pi)
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des antécédents de a par exp dans $\mathbb{C}$ est :

$$\exp^{-1}(\{a\}) = \left\{ \ln(|a|) + i(\theta + 2k\pi) \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

En particulier, exp est surjective. ■

VI – Nombres complexes et géométrie

1) Transformations particulières du plan complexe

Définition (translation, homothétie, rotation, similitude directe) Soient $\omega, b \in \mathbb{C}$ et $r, \theta \in \mathbb{R}$.

- ⋆ On appelle *translation du plan complexe de vecteur d'affixe* b l'application :

$$t_b : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + b \end{array} \right.$$

où $b \in \mathbb{C}$.

★ On appelle *homothétie de centre (le point d'affixe) ω et de rapport r* l'application :

$$h_{\omega,r} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \omega + r(z-\omega) \end{array} \right.$$

★ On appelle *rotation de centre $\omega \in \mathbb{C}$ et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$* l'application :

$$R_{\omega,\theta} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \omega + \mathrm{e}^{i\theta}(z-\omega) \end{array} \right.$$

★ On appelle *similitude directe du plan* toute application de la forme :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \omega + \mathrm{e}^{i\theta}(z-\omega) \end{array} \right.$$

où $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

Remarque : si f est une rotation ou une homothétie de centre $\omega \in \mathbb{C}$, alors ω est un point fixe de f (*i.e.* $f(\omega) = \omega$).

Étude des similitudes du plan :

Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et la similitude du plan $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az+b \end{array} \right.$.

★ Si $a = 1$, alors f est la translation du plan complexe de vecteur d'affixe b (*i.e.* $f = t_b$).

★ Si $a \neq 1$, alors f possède un (et un seul) point fixe, à savoir $\omega = \dfrac{b}{1-a}$. On peut donc écrire que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f(z) - \omega = (az+b) - (a\omega + b) = a(z-\omega) = |a|\,\mathrm{e}^{i\theta}(z-\omega)$$

Autrement dit :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad f(z) = \omega + |a|\,\mathrm{e}^{i\theta}(z-\omega)$$

d'où l'on tire que :

$$f = R_{\omega,\theta} \circ h_{\omega,|a|} = h_{\omega,|a|} \circ R_{\omega,\theta}$$

Démonstration Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{aligned} (R_{\omega,\theta} \circ h_{\omega,|a|})(z) = R_{\omega,\theta}(h_{\omega,|a|}(z)) &= R_{\omega,\theta}(\omega + |a|(z-\omega)) \\ &= \omega + \mathrm{e}^{i\theta}\left[(\omega + |a|(z-\omega)) - \omega\right] \\ &= \omega + |a|\,\mathrm{e}^{i\theta}(z-\omega) \end{aligned}$$

Donc $f = R_{\omega,\theta} \circ h_{\omega,|a|}$. La deuxième identité se démontre de la même manière. ∎

Exemple L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & 2iz+1 \end{array} \right.$ est la similitude directe de centre $\omega = \dfrac{1}{1-2i} = \dfrac{1+2i}{5}$, de rapport 2 et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

2) Interprétation géométrique de $\dfrac{c-a}{b-a}$

Proposition Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $b \neq a$. On note A, B et C les images de a, b et c respectivement dans le plan complexe. Alors :

$$\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = \frac{AC}{AB} \qquad \text{et} \qquad \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) [2\pi]$$

Démonstration On a :

$$\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = \frac{|c-a|}{|b-a|} = \frac{AC}{AB}$$

et :

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) &\equiv \arg(c-a) - \arg(b-a)\ [2\pi] \\ &\equiv \left(\vec{i}, \overrightarrow{AC}\right) - \left(\vec{i}, \overrightarrow{AB}\right)\ [2\pi] \\ &\equiv \left(\overrightarrow{AB}, \vec{i}\right) + \left(\vec{i}, \overrightarrow{AC}\right)\ [2\pi] \\ &\equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\ [2\pi]\end{aligned}$$

■

Conséquences. Avec les mêmes notations :

- ⋆ les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$;
- ⋆ les droites (AB) et (AC) sont orthogonales si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$.

✎✎✎ **Exercice** Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que le triangle de sommets les points d'affixes z, z^2et z^3 soit rectangle en z.

Une solution.
Les nombres complexes $z = 0$ et $z = 1$ conviennent. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Le triangle de sommets les points d'affixes z, z^2 et z^3 est rectangle en z si et seulement si $\dfrac{z^3 - z}{z^2 - z} \in i\mathbb{R}$, d'où l'on tire que $\mathrm{Re}(z) = -1$. L'ensemble cherché est donc :

$$\{0, 1\} \cup \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Re}(z) = -1\right\}$$

VII – Extension de la dérivation pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Soient I un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. On définit les fonctions partie réelle et partie imaginaire de f, notée $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ par :

$$\forall x \in I, \qquad \mathrm{Re}(f)(x) = \mathrm{Re}(f(x)) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(f)(x) = \mathrm{Im}(f(x))$$

Les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont à valeurs réelles.

Définition ⋆ Soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables en a. Dans ce cas, on appelle nombre dérivée de f en a, noté $f'(a)$, le nombre complexe défini par :

$$f'(a) = \mathrm{Re}(f)'(a) + i\mathrm{Im}(f)'(a)$$

⋆ On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. La dérivée de f est alors la fonction :

$$f' : \left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}\right.$$

Les formules de dérivation d'une somme, d'un produit et d'un quotient de fonctions complexes sont les mêmes que pour les fonctions réelles (voir chapitre 1), de même que la formule de dérivation d'un composée.

Exemple ⋆ La fonction $f : x \longmapsto x^2 + i\sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car les fonctions $x \longmapsto x^2$ et $x \longmapsto \sin(x)$ le sont) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = 2x + i\cos(x)$$

⋆ La fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x+i}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables (le dénominateur ne s'annulant pas) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g'(x) = -\frac{1}{(x+i)^2}$$

Pour les fonctions complexes, on ne peut pas parler de monotonie ni de signe de la dérivée ! On peut néanmoins caractériser les fonctions constantes sur un intervalle avec la dérivée.

Théorème (caractérisation des fonctions dérivables constantes) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I. La fonction f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.

Démonstration On a :

$$\begin{aligned} f' \text{ est nulle sur } I &\iff \mathrm{Re}(f)' \text{ et } \mathrm{Im}(f)' \text{ sont nulles sur } I \\ &\iff \mathrm{Re}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont constantes sur } I \qquad \text{(puisque } I \text{ est un intervalle)} \\ &\iff f \text{ est constante sur } I \end{aligned}$$

d'après ce qu'on a vu pour les fonctions dérivables sur un intervalle à valeurs réelles. ■