

# APPLICATIONS

Dans tout ce chapitre,  $E$ ,  $F$ ,  $G$  et  $H$  désignent deux ensembles non vides quelconques.

## I – Notion d’application

### 1) Définition

Intuitivement, une application (ou une fonction) est une courbe. Par exemple, la fonction  $x \mapsto x^2$  peut être vue comme l’ensemble des points du plan de coordonnées  $(x, x^2)$  où  $x$  décrit  $\mathbb{R}$ . Nous définissons précisément dans un premier temps une application.

**Définition (notion d’application)** On appelle *application (ou fonction) de  $E$  dans  $F$*  tout triplet de la forme  $f = (E, F, \mathcal{G})$ , où  $\mathcal{G}$  est une partie de  $E \times F$  vérifiant la propriété suivante :

$$\forall x \in E, \exists ! y \in F, \quad (x, y) \in f$$

### Vocabulaire.

- ★ Étant donné  $x \in E$ , l’unique  $y \in F$  tel que  $(x, y) \in f$  est appelé l’image de  $x$  par  $f$ . On note alors  $y = f(x)$ . On dit aussi que  $x$  est *un* antécédent de  $y$  par  $f$ .
- ★ On dit que  $E$  est l’*ensemble de départ* de l’application  $f$  et que  $F$  est son *ensemble d’arrivée*.
- ★ L’ensemble  $\mathcal{G}$  est appelé le *graphe* de l’application  $f$  et on a :

$$\mathcal{G} = \{(x, f(x)) \mid x \in E\} \in \mathcal{P}(E \times F)$$

Cette définition n’est pas très maniable. Par exemple, la fonction carrée telle qu’on la connaît (comme application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ) est, avec la définition ci-dessus, l’application :

$$f = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\})$$

Pour gagner en maniabilité, nous noterons désormais l’application  $f$  comme suit :

$$f : \begin{cases} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$$

Il faut avoir en tête qu’il y a trois objets qui caractérisent une application : l’ensemble de départ  $E$ , l’ensemble de départ  $F$ , et l’expression «  $f(x)$  » (qui est contenue dans la définition du graphe  $\mathcal{G}$  de  $f$ ).

**Exemple** La fonction carrée  $f$  introduite précédemment redevient donc :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$$

**Définition** L’ensemble des applications de  $E$  dans  $F$  est noté  $F^E$  (ou parfois  $\mathcal{F}(E, F)$ ).

### 2) Notion de famille d’éléments d’un ensemble

**Définition (famille d'éléments d'un ensemble)** Soit  $I$  un ensemble non vide. On appelle famille d'éléments de  $E$  indexée par l'ensemble  $I$  tout élément de  $E^I$ . Une telle famille peut être notée :

$$f = (\lambda_i)_{i \in I} \quad \text{au lieu de} \quad f : \begin{cases} I & \longrightarrow E \\ i & \longmapsto \lambda_i \end{cases}$$

où, pour tout  $i \in I$ ,  $\lambda_i$  est un élément de  $E$  (cette notation signifie que pour tout  $i \in I$ , on a  $f(i) = \lambda_i$ ).

**Exemple** Par exemple, la famille  $(\cos(\theta))_{\theta \in \mathbb{R}}$  désigne l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto \cos(\theta) \end{cases}$$

**Remarque (cas particulier important) :** l'ensemble  $E^{\mathbb{N}}$  est celui des fonctions de  $\mathbb{N}$  dans  $E$ . Une telle fonction  $u$  est plutôt appelée suite. L'image d'un entier  $n \in \mathbb{N}$  par  $u$  est notée  $u_n$  (au lieu de  $u(n)$ ) et la fonction (c'est-à-dire la suite)  $u$  est souvent notée  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (au lieu de  $u$ ).

**Exemple** La suite  $u = (2^n + n)_{n \in \mathbb{N}}$  est telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n + n$$

### 3) Applications particulières

#### (a) Application identité

L'application ci-dessous va jouer un rôle particulier dans la suite.

**Définition (application identité)** On appelle *identité de  $E$* , notée  $\text{Id}_E$ , l'application suivante :

$$\text{Id}_E : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ x & \longmapsto x \end{cases} \quad (\text{ici } F = E)$$

**Exemple** Le graphe de la fonction  $\text{Id}_{\mathbb{R}}$  correspond à la première bissectrice.

#### (b) Fonction indicatrice d'un ensemble

Une fonction indicatrice permet de *détecter* les éléments d'un ensemble.

**Définition (fonction indicatrice)** Soit  $A \in \mathcal{P}(E)$ . On appelle *fonction indicatrice* de  $A$  l'application notée  $\mathbf{1}_A$  suivante :

$$\mathbf{1}_A : \begin{cases} E & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases} \end{cases}$$

**Exemple** Pour le choix  $E = \mathbb{R}$  :

- ★ la fonction indicatrice  $\mathbf{1}_{\mathbb{R}}$  est la fonction constante égale à 1 ;

★  $\mathbf{1}_{[0,1] \cup [2,3]}$  est définie par :

$$\mathbf{1}_{[0,1] \cup [2,3]} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1] \cup [2, 3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

★ la fonction  $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}}$  est :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Z}} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Par exemple,  $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}}(-2) = 1$  tandis que  $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}}(\pi) = 0$ .

**Proposition** Soient  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ . Alors :

- ★  $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$  ;
- ★  $\mathbf{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$  ;
- ★  $\mathbf{1}_{B \setminus A} = \mathbf{1}_B(1 - \mathbf{1}_A)$  ;
- ★  $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$ .

où 1 désigne ici la fonction constante égale à 1.

**Démonstration** Soient  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ .

★ Soit  $x \in E$ . On distingue deux cas.

— **Premier cas** :  $x \in A \cap B$

Alors  $x \in A$ ,  $x \in B$  et  $x \in A \cap B$  donc  $\mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_B(x) = \mathbf{1}_{A \cap B}(x) = 1$  et alors :

$$\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$$

— **Deuxième cas** :  $x \notin A \cap B$

Ici  $x \notin A$ ,  $x \notin B$  et  $x \notin A \cap B$  donc  $\mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_B(x) = \mathbf{1}_{A \cap B}(x) = 0$  et alors :

$$\mathbf{1}_{A \cap B}(x) = \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(x)$$

On a donc bien l'égalité annoncée.

★ Pour le calcul de  $\mathbf{1}_{\overline{A}}$ , on traite à nouveau deux cas suivant que  $x \in A$  ou  $x \in \overline{A}$ .

★ En utilisant les deux identités précédentes (et en notant  $1 : E \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction constante égale à 1), on a :

$$\mathbf{1}_{B \setminus A} = \mathbf{1}_{B \cap \overline{A}} = \mathbf{1}_B \times \mathbf{1}_{\overline{A}} = \mathbf{1}_B \times (1 - \mathbf{1}_A)$$

★ D'après les formules de De Morgan, on sait que  $A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$  donc (en utilisant les identités précédentes) :

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A \cup B} &= 1 - \mathbf{1}_{\overline{A \cap B}} = 1 - \mathbf{1}_{\overline{A}} \times \mathbf{1}_{\overline{B}} = 1 - (1 - \mathbf{1}_A)(1 - \mathbf{1}_B) \\ &= 1 - (1 - \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B) \end{aligned}$$

d'où la formule annoncée. ■

#### 4) Notions de restriction et de prolongement

Dans ce paragraphe, nous construisons, à partir d'une application donnée  $f \in F^E$ , une nouvelle application en agissant soit sur l'ensemble de départ de  $f$ , soit sur son ensemble d'arrivée.

**Définition (restriction)** Soit  $f : E \rightarrow F$  une application et soit  $\tilde{E} \subset E$ . On appelle *restriction de  $f$  à  $\tilde{E}$*  l'application  $f|_{\tilde{E}}$  de  $\tilde{E}$  dans  $F$  suivante :

$$f|_{\tilde{E}} : \begin{cases} \tilde{E} & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$$

**Remarque :** l'expression de  $f$  et le domaine d'arrivée restent inchangés.

**Exemple** La restriction de l'application  $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$  à  $\mathbb{R}_+$  est simplement l'application :

$$f|_{\mathbb{R}_+} : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$$

Il y a une unique manière de restreindre une application à un sous-ensemble de  $E$ . La notion suivante de prolongement d'une application est plus complexe.

**Définition (prolongement d'une application)** Soient  $f : E \rightarrow F$  une application et  $\tilde{E}$  un ensemble *contenant  $E$*  (c'est-à-dire  $E \subset \tilde{E}$ ). On appelle *prolongement de  $f$  à  $\tilde{E}$*  toute application  $\tilde{f} : \tilde{E} \rightarrow F$  telle que  $\tilde{f}|_E = f$ .

**Remarque :** il n'y a pas unicité dans cette définition. La fonction  $\begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$  admet par exemple les prolongements (distincts) suivants sur  $\mathbb{R}$  :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{cases} \quad \text{et} \quad h : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$$

Moralement, une restriction revient donc à couper le graphe pour n'en garder qu'une partie, alors qu'un prolongement est une extension du graphe avec un ensemble de départ plus grand.

### 5) Images directe et réciproque

Les notions suivantes sont à bien comprendre (il faut savoir réécrire précisément les définitions).

**Définition (image directe, image réciproque)** Soit  $f \in F^E$ .

★ Soit  $A \in \mathcal{P}(E)$ . On appelle *image (directe) de  $A$  par  $f$*  le sous-ensemble de  $F$  noté  $f(A)$  suivant :

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists a \in A, y = f(a)\}$$

ce que l'on peut encore écrire :

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$$

★ Soit  $B \in \mathcal{P}(F)$ . On appelle *image réciproque de  $B$  par  $f$*  le sous-ensemble de  $E$  noté  $f^{-1}(B)$  suivant :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

**Remarques :**

- ★ Il faut être vigilant avec la notation «  $f^{-1}(B)$  » : l'application  $f$  n'est pas nécessairement bijective.
- ★ Si  $y \in F$ , alors  $f^{-1}(\{y\})$  est l'ensemble des *antécédents* de  $y$  par  $f$  dans  $E$ . En effet :

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in E \mid f(x) \in \{y\}\} = \{x \in E \mid f(x) = y\}$$

- Exemple**      ★ si  $f : x \mapsto x^2$ , alors  $f([-1, 3]) = [0, 9]$  et  $f^{-1}([0, 4]) = [-2, 2]$  ;
- ★  $\sin^{-1}(\{0\}) = \pi\mathbb{Z} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$  et  $\sin^{-1}(\{2\}) = \emptyset$  ;
  - ★  $\exp(\mathbb{R}_+) = [1, +\infty[$ .

## II – Injections, surjections et bijections

Les trois notions qui suivent sont fondamentales. Elles seront reprises dans de nombreux chapitres (notamment en algèbre linéaire).

**Définition (notion d'antécédent)**      Soient  $f \in F^E$  une application et  $y \in F$ . Un élément  $x$  de  $E$  est appelé un antécédent dans  $E$  de  $y$  par  $f$  si  $f(x) = y$ .

- Exemple**      1. Pour l'application  $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases} :$
- ★  $-1$  n'admet pas d'antécédent par  $f$  dans  $\mathbb{R}$  ; par contre,  $1$  admet deux antécédents, à savoir  $-1$  et  $1$  ;
  - ★  $0$  admet un unique antécédent par  $f$  dans  $\mathbb{R}$ , à savoir  $0$ .
2. Pour l'application  $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$ , tout élément  $x$  de  $\mathbb{R}_+$  admet un unique antécédent par  $f$ , à savoir  $\sqrt{x}$ .
3. Si on considère maintenant l'application  $\sin : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{cases}$ , alors  $0$  admet une infinité d'antécédents par  $\sin$  dans  $\mathbb{R}$ . L'ensemble des antécédents de  $0$  est  $\pi\mathbb{Z} \stackrel{\text{notation}}{=} \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ . Tout  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $|x| > 1$  n'admet pas d'antécédent.
4. Pour l'application  $\tilde{\sin} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1, 1] \\ x & \longmapsto & \sin(x) \end{cases}$ , tout élément de  $[-1, 1]$  admet au moins un antécédent.

**Remarque :** on note donc que l'étude d'antécédents dépend de l'ensemble d'arrivée et de départ.

### 1) Application surjective (ou surjection)

**Définition (application surjective)**      Soit  $f \in F^E$ . On dit que  $f$  est *surjective* si tout élément de  $F$  admet *au moins* un antécédent par  $f$ . Autrement dit,

$$f \text{ est surjective} \iff \forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

On dit aussi que  $f$  est une surjection de  $E$  sur  $F$ .

- Exemple**      ★ L'application  $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$  est surjective. En effet, pour tout  $y \in \mathbb{R}_+$  ( $y$  est donc positif!),  $\sqrt{y}$  est un antécédent de  $y$  par  $g$  car  $g(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$ . Donc  $g$  est surjective.

- ★ L'application  $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$  n'est pas surjective. En effet,  $-1$  n'admet pas d'antécédent par  $f$  (la fonction  $f$  ne prenant que des valeurs positives ou nulles).
- ★ L'application identité  $\text{Id}_E$  est surjective.

**Remarque :** pour montrer qu'une application  $f \in F^E$  n'est pas surjective, il suffit d'exhiber un élément de  $F$  qui n'admet pas d'antécédent.

 **Exercice** Étudier la surjectivité de :

1. Montrer que la fonction  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln |x| \end{cases}$  est surjective.
2. Montrer que la fonction  $g : \begin{cases} \mathbb{R}_- & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$  est surjective.
3.  $j : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{cases}$
4.  $k : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{cases}$

**Remarque (importante) :** une application  $f$  est surjective si et seulement si  $f(E) = F$ .

## 2) Application injective (ou injection)

**Définition (application injective)** Soit  $f \in F^E$ . On dit que  $f$  est injective si tout élément de  $F$  admet *au plus* un antécédent par  $f$  dans l'ensemble de départ  $E$ . Autrement dit, si  $y$  est un élément de  $F$ , alors :

- ou bien  $y$  n'admet pas d'antécédent par  $f$  ;
- ou bien  $y$  admet un et un seul antécédent par  $f$ .

On dit aussi que  $f$  est une injection de  $E$  dans  $F$ .

**Exemple** ★ L'application  $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$  est injective. En effet :

- si  $y < 0$ , alors  $y$  n'a pas d'antécédent par  $f$  ;
- et si  $y \geq 0$ , alors comme l'équation  $y = x^2$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}_+$  (à savoir  $\sqrt{y}$ ),  $y$  admet un unique antécédent dans  $\mathbb{R}_+$ .

★ Par contre, le prolongement  $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$  de  $f$  n'est pas injectif. En effet, le nombre 1 (par exemple) admet deux antécédents par  $f$ , à savoir  $-1$  et  $1$ .

1. L'application identité  $\text{Id}_E$  est injective.

Le point (iii) ci-dessous permet d'étudier en pratique l'injectivité d'une application.

**Proposition (étude pratique de l'injectivité)** Soit  $f \in F^E$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f : E \longrightarrow F$  est injective ;
- (ii)  $\forall x_1, x_2 \in E, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$  ;
- (iii)  $\forall x_1, x_2 \in E, f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ .

**Démonstration** Les propositions (ii) et (iii) sont clairement équivalentes (on sait en effet qu'une implication  $P \implies Q$  est équivalente à sa forme contraposée).

Montrons maintenant que (i) et (iii) sont équivalentes.

- ★ Supposons que (i) soit satisfaite et soit  $x_1, x_2 \in E$  tel que  $f(x_1) = f(x_2)$ . Alors  $x_1$  et  $x_2$  sont des antécédents de  $f(x_1)$  par  $f$  dans  $E$  donc, par injectivité de  $f$ , on a  $x_1 = x_2$ , ce qui démontre (iii).
- ★ Supposons maintenant que (iii) soit satisfaite et montrons que  $f$  est injective. Soient  $y$  un élément de  $F$  et  $x, x' \in E$  deux antécédents de  $y$  par  $f$  dans  $E$ . Alors  $y = f(x) = f(x')$  ce qui implique (d'après (iii)) que  $x = x'$ . Ainsi, si  $y$  admet un antécédent par  $f$  dans  $E$ , il en admet un et un seul. Donc  $f$  est injective et (i) est satisfaite.

Finalement, les trois propositions sont équivalentes. ■

**Remarque :** pour montrer qu'une application  $f \in F^E$  n'est pas injective, il suffit d'exhiber deux éléments distincts de  $E$  qui ont la même image par  $f$ .

 **Exercice** Étudier l'injectivité des applications suivantes :

1.  $f : \begin{cases} \mathbb{Q} \setminus \{2\} & \longrightarrow \mathbb{Q} \\ q & \longmapsto \frac{q+5}{q-2} \end{cases}$
2.  $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 3e^{2x+1} + 5 \end{cases}$
3.  $h : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto |x| \end{cases}$

Le résultat suivant est réservé aux fonctions de la variable réelle à valeurs réelles.

**Théorème (injectivité et stricte monotonie)** Soient  $A$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$  et  $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Si  $f$  est strictement monotone, alors  $f$  est injective.

**Démonstration** Supposons que  $f$  soit strictement croissante et soient  $x, x' \in A$ . Si  $x < x'$ , alors  $f(x) < f(x')$  par stricte croissance de  $f$  sur  $A$ . De même, si  $x > x'$ , alors  $f(x) > f(x')$ . Ainsi, si  $x \neq x'$ , alors  $f(x) \neq f(x')$ . Finalement,  $f$  est injective. ■

**Remarque :** la réciproque de ce résultat est fautive. Il est possible que la fonction soit injective sans être monotone (et nécessairement, une telle fonction n'est pas continue).

**Exemple** Étude de l'injectivité de  $f : x \longmapsto x - \ln(1+x)$  sur  $\mathbb{R}_+$ .

### 3) Application bijective (ou bijection)

**Définition** Soit  $f \in F^E$ . On dit que  $f$  est bijective si tout élément de  $F$  admet un unique antécédent par  $f$ , i.e. si :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x)$$

On dit aussi que  $f$  est une bijection de  $E$  sur  $F$ .

**Exemple** ★ L'application  $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto 2x \end{cases}$  est bijective.

**Justification.**

Soit  $y \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $y$  possède un et un seul antécédent par  $g$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$y = g(x) \iff y = 2x \iff x = \frac{y}{2}$$

Ainsi,  $y$  admet un et un seul antécédent par  $g$  dans  $\mathbb{R}$ , à savoir  $\frac{y}{2}$ . On en conclut que  $g$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

★ L'application identité  $\text{Id}_E$  est bijective.

La proposition suivante fait le lien avec l'injectivité et la surjectivité.

**Proposition** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles non vides et  $f : E \rightarrow F$  une application. Alors  $f$  est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

**Démonstration** C'est une conséquence immédiate des trois définitions. ■

 **Exercice** Étudier la bijectivité des applications ci-dessous :

$$1. f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{x+1}{x-1} \end{cases}$$

$$2. g : \begin{cases} \mathbb{R}_- & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$$

$$3. h : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto 2e^{5x+1} \end{cases}$$

**Remarque :** une application peut être ni injective, ni surjective comme par exemple l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto |x| \end{cases}$$

### III – Réciproque d'une application bijective

#### 1) Composition d'applications

**Définition (composition de deux applications)** Soient  $E, F$  et  $G$  trois ensembles,  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux applications. On appelle *composée de  $g$  par  $f$*  l'application notée  $g \circ f$  suivante :

$$g \circ f : \begin{cases} E & \rightarrow G \\ x & \mapsto g(f(x)) \end{cases}$$

**Remarque :** attention au sens de composition !

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Action de } g \circ f : & E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \\ & x & \mapsto & f(x) & & \\ & & & & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

**Proposition** Soient  $E, F, G$  et  $H$  quatre ensembles,  $f \in F^E, g \in G^F$  et  $h \in H^G$ . Alors :

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \quad (\text{associativité de la composition})$$

On dit que la composition des applications est *associative* et on peut noter  $h \circ g \circ f$  la composée (sans parenthèses).

**Démonstration** immédiat ■

**Remarques :**

- ★ Par contre, la composition n'est pas une opération commutative. Considérer par exemple, les éléments  $f$  et  $g$  de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  tels que  $f : x \mapsto x + 1$  et  $g : x \mapsto x^2$ .
- ★ D'ailleurs, si  $g \circ f$  a un sens, il n'est pas nécessairement possible de définir  $f \circ g$ !
- ★ Pour tout  $f \in E^E$ , on a :

$$f \circ \text{Id}_E = \text{Id}_E \circ f = f$$

On dit que  $\text{Id}_E$  est *élément neutre* pour la composition des applications.

**Proposition (composée de deux injections ou surjections ou bijections)** Soient  $f \in F^E$  et  $g \in G^F$ .

- ★ Si  $f$  et  $g$  sont injectives, alors  $g \circ f$  est injective.
- ★ Si  $f$  et  $g$  sont surjectives, alors  $g \circ f$  est surjective.
- ★ Si  $f$  et  $g$  sont bijectives, alors  $g \circ f$  est bijective.

**Démonstration** ★ On suppose que  $f$  et  $g$  sont injectives. Soient  $x, x' \in E$  tel que  $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ . On a alors  $g(f(x)) = g(f(x'))$ . Comme  $g$  est injective, on a  $f(x) = f(x')$ . Par suite  $x = x'$  puisque  $f$  est injective. Finalement,  $g \circ f$  est injective.

- ★ On suppose que  $f$  et  $g$  sont surjectives. Soit  $z \in G$ . Comme  $g : F \rightarrow G$  est surjective, il existe  $y \in F$  tel que  $z = g(y)$ . Ensuite,  $f : E \rightarrow F$  est surjective donc il existe  $x \in E$  tel que  $y = f(x)$ . Ainsi :

$$z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

Donc  $x$  est un antécédent de  $z$  par l'application  $g \circ f$  dans  $E$ . Par conséquent,  $g \circ f$  est une application surjective.

- ★ Si  $f$  et  $g$  sont bijectives, alors elles sont injectives et surjectives, ce qui implique (d'après les deux premiers points) que  $g \circ f$  est injective et surjective, donc bijective. ■

**Exemple** La fonction  $\exp$  est injective sur  $\mathbb{R}$ , la fonction  $x \mapsto x^2$  est injective sur  $\mathbb{R}_+$  donc  $x \mapsto e^{x^2}$  est injective sur  $\mathbb{R}_+$ .

## 2) Notion d'application réciproque

**Définition (réciproque)** Soit  $f : E \rightarrow F$  une application. On appelle *réciproque de  $f$*  toute application  $g : F \rightarrow E$  telle que :

$$g \circ f = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{Id}_F$$

**Exemple** ★ L'application  $\text{Id}_E : E \rightarrow E$  admet  $\text{Id}_E$  pour réciproque (puisque  $\text{Id}_E \circ \text{Id}_E = \text{Id}_E$ ).

- ★ L'application  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  est bijective de réciproque  $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ .

La proposition suivante permet de définir la réciproque d'une application bijective.

**Théorème** Soit  $f \in F^E$ .

- ★ L'application  $f : E \rightarrow F$  est bijective si et seulement si elle possède une réciproque.
- ★ Dans ce cas, une telle application réciproque est unique ; on la note  $f^{-1}$ .

**Démonstration** On commence par démontrer l'équivalence.

( $\implies$ ) Supposons que  $f$  soit bijective. Notons  $g$  l'application de  $F$  dans  $E$  qui à tout élément  $y$  de  $F$  fait correspondre l'unique antécédent  $x$  de  $y$  par  $f$  dans  $E$ .

— Soit  $x \in E$ . Alors  $g(f(x))$  est l'unique antécédent de  $f(x)$  par  $f$  dans  $E$ , à savoir  $x$ , donc :

$$g(f(x)) = x = \text{Id}_E(x)$$

D'où  $g \circ f = \text{Id}_E$ .

— Soit  $y \in E$ . Alors  $g(y)$  est l'unique antécédent de  $y$  par  $f$  dans  $E$ . Donc  $f(g(y)) = y$ . Ainsi,  $f \circ g = \text{Id}_F$ .

Il existe donc bien  $g \in E^F$  tel que  $f \circ g = \text{Id}_F$  et  $g \circ f = \text{Id}_E$ .

( $\impliedby$ ) Supposons maintenant que  $f$  admette une réciproque  $g \in E^F$  et montrons que  $f$  est bijective en montrant qu'elle est injective et surjective.

- Soit  $(x, x') \in E^2$  tel que  $f(x) = f(x')$ . En appliquant la fonction  $g$ , on obtient que  $g(f(x)) = g(f(x'))$ , c'est-à-dire  $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ , soit encore  $x = x'$  (puisque  $g \circ f = \text{Id}_E$ ). Donc  $f$  est injective.
- Soit  $y \in F$ . Alors  $f(g(y)) = y$  (puisque  $f \circ g = \text{Id}_F$ ) donc  $g(y)$  est un antécédent de  $y$  par  $f$  dans  $E$  donc  $f$  est surjective.

Nous avons donc démontré l'équivalence annoncée, montrons maintenant l'unicité. Supposons que  $g, h \in E^F$  soient des applications réciproques de  $f$ . Pour tout  $y \in F$ , on a :

$$g(y) = g(\text{Id}_F(y)) = g((f \circ h)(y)) = (g \circ f \circ h)(y) = (g \circ f)(h(y)) = \text{Id}_E(h(y)) = h(y)$$

donc  $g = h$ . ■

**Remarques :**

- ★ Si  $f \in F^E$  est bijective, alors on a les égalités :

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$$

- ★ Soit  $y \in F$ . Alors, par définition de l'image réciproque d'un ensemble par une application, on a :

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in E \mid f(x) = y\} \quad (\text{ensemble des antécédents de } y \text{ par } f)$$

Si  $f$  est bijective, alors  $y$  admet un unique antécédent  $x$  par  $f$  dans  $E$  (on a  $f^{-1}(y) = x$ ) et alors  $f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$  (ceci explique pourquoi on a choisi la notation «  $f^{-1}(B)$  » pour définir l'image réciproque d'un ensemble).

- ★ Si  $f \in F^E$  est bijective, alors :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y) \tag{1}$$

- ★ Pour une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , la propriété (1) signifie géométriquement que le graphe de  $f$  et celui de  $f^{-1}$  sont (dans un repère orthogonal) symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation  $y = x$ .

**Proposition** Soient  $f \in F^E$  et  $g \in G^F$ .

- ★ Si  $f$  est bijective, alors l'application  $f^{-1} : F \rightarrow E$  est bijective de réciproque :

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

- ★ Si  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  sont bijectives, alors  $g \circ f : E \rightarrow G$  est bijective de réciproque :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

**Démonstration** ★ Comme  $f$  est bijective de  $E$  sur  $F$ , son application réciproque  $f^{-1} : F \rightarrow E$  existe et on a les égalités :

$$f^{-1} \circ f = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$$

D'après la proposition 2, l'application  $f^{-1}$  est bijective de réciproque  $(f^{-1})^{-1} = f$ .

★ L'application  $f^{-1} \circ g^{-1}$  est bien définie puisque  $f$  et  $g$  sont bijectives. Pour montrer que  $g \circ f : E \rightarrow G$  est bijective de réciproque  $h = f^{-1} \circ g^{-1}$ , il suffit, d'après la proposition 2, de vérifier que :

$$(g \circ f) \circ h = \text{Id}_G \quad \text{et} \quad h \circ (g \circ f) = \text{Id}_E$$

Or, par associativité de la composition :

$$(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \text{Id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{Id}_G$$

On démontre la deuxième identité de la même manière. ■

**Remarque :** on savait déjà que  $g \circ f$  est bijective (puisque  $f$  et  $g$  le sont). Nous l'avons redémontrer en obtenant l'application réciproque.

### 3) Comment montrer que $f$ est bijective et déterminer (en même temps) $f^{-1}$ ?

Si  $f \in F^E$  est une application, on démontre (à la main) l'assertion :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$$

On se donne donc  $y \in F$  et on résout l'équation  $y = f(x)$  d'inconnue  $x \in E$ .

**Exemple** La réciproque de l'application  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x & \longmapsto & \frac{x+1}{x-1} \end{cases}$  est :

$$f^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ y & \longmapsto & \frac{y+1}{1-y} \end{cases}$$

 **Exercice** Montrer que l'application  $g : x \mapsto \sqrt{2x-4}$  réalise une bijection d'un intervalle  $I$  vers un intervalle  $J$  à déterminer. Déterminer ensuite  $g^{-1}$ .