

# FAMILLES SOMMABLES

## Table des matières

<b>1 Familles sommables de réels positifs</b>	<b>1</b>
1.1 Définition . . . . .	1
1.2 Sommabilité et sommes finies, sommabilité vs convergence de série . . . . .	4
1.3 Opérations sur les sommes . . . . .	5
1.4 Sommation par paquets . . . . .	7
<b>2 Familles sommables à valeurs dans <math>\mathbb{C}</math></b>	<b>8</b>
2.1 Notions de sommabilité . . . . .	8
2.2 Somme d'une famille sommable quelconque . . . . .	10
2.3 Sommation par paquets . . . . .	11
<b>3 Produit de Cauchy</b>	<b>12</b>

### Quelques rappels :

★ Dans  $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$ , on peut écrire que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+, x \leq +\infty, +\infty + x = +\infty) \quad \text{et} \quad +\infty \leq +\infty$$

★ **Propriété de la borne supérieure** : toute partie non vide de  $\mathbb{R}_+$  admet une borne supérieure dans  $\overline{\mathbb{R}_+}$  (elle appartient à  $\mathbb{R}_+$  si la partie est majorée ; sinon, elle vaut  $+\infty$ ).

★ **Caractérisation séquentielle de la borne supérieure dans  $\overline{\mathbb{R}_+}$**  :

Soient  $A$  une partie de  $\mathbb{R}_+$  et  $M \in \overline{\mathbb{R}_+}$ . Alors :

$$M = \sup(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A, a \leq M \\ \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M \end{cases}$$

★ Par convention,  $\sum_{i \in \emptyset} u_i = 0$ .

Dans tout ce chapitre,  $I$  désigne un ensemble non vide quelconque. On note  $\mathcal{P}_f(I)$  l'ensemble des parties de  $I$  ayant un nombre fini d'éléments.

**Exemple** Si  $I = \mathbb{Z}$ , on a  $\emptyset \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Z})$ ,  $[-10, 10] \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Z})$  mais  $2\mathbb{N} \notin \mathcal{P}_f(\mathbb{Z})$ .

## I – Familles sommables de réels positifs

### 1) Définition

Soit  $u = (u_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$  (i.e. :  $\forall i \in I, u_i \in \mathbb{R}_+$ ).

**Proposition** L'ensemble :

$$S(u) = \left\{ \sum_{i \in F} u_i \mid F \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$$

admet une borne supérieure dans  $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$ .

**Démonstration** L'ensemble  $S(u)$  est une partie de  $\mathbb{R}$  (même de  $\mathbb{R}_+$ ) qui est non vide d'où le résultat d'après la propriété de la borne supérieure. ■

**Définition (somme d'une famille sommable)** La quantité  $\sup(S(u))$  est appelée somme de la famille  $(u_i)_{i \in I}$  et est notée  $\sum_{i \in I} u_i$ .

**Remarques :**

★ La somme existe toujours et  $\sum_{i \in I} u_i \in [0, +\infty]$ .

★ Par définition de la borne supérieure, on a :

$$\forall F \in \mathcal{P}_f(I), \quad \sum_{i \in F} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i$$

**Définition (famille sommable positive)** La famille  $(u_i)_{i \in I}$  est dite *sommable* si :

$$\sum_{i \in I} u_i \in \mathbb{R}_+ \quad i.e. \quad \sum_{i \in I} u_i < +\infty$$

**Exemple** La famille (positive)  $(x)_{x \in \mathbb{Q}_+}$  n'est pas sommable. En effet, pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on a  $F_N = \llbracket 0, N \rrbracket \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Q}_+)$  donc :

$$\sum_{x \in \mathbb{Q}_+} x \geq \sum_{x \in \llbracket 0, N \rrbracket} x = N + 1$$

Ainsi,  $\sum_{n \in \mathbb{Q}_+} x$  majore l'ensemble  $\mathbb{N}^*$ , ce qui signifie que  $\sum_{x \in \mathbb{Q}_+} x = +\infty$ .

**Exemple** Soit  $x \in ]0, 1[$ . Montrons que la famille  $u = (x^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$  est sommable. Soit  $F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Z})$ . Alors :

$$\sum_{n \in F} x^{|n|} = \underbrace{\sum_{n \in F \cap \mathbb{N}} x^n}_{\text{notée } S_1} + \underbrace{\sum_{n \in F \setminus \mathbb{N}} \frac{1}{x^n}}_{\text{notée } S_2}$$

Posons  $M = \max \{|n| \mid n \in F\}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on a  $x^n \geq 0$  donc :

$$S_1 \leq \sum_{n=0}^M x^n = \frac{1 - x^{M+1}}{1 - x} \leq \frac{1}{1 - x} \quad \text{et} \quad S_2 \leq \sum_{n=-M}^{-1} x^{-n} = \sum_{n=1}^M x^n \leq \frac{x}{1 - x}$$

Ainsi :

$$\sum_{n \in F} x^{|n|} = S_1 + S_2 \leq \frac{1+x}{1-x}$$

On en déduit que l'ensemble  $S(u)$  est majoré (et est non vide) donc admet une borne supérieure (finie) d'après la propriété de la borne supérieure. Autrement dit, la famille  $u$  est sommable.

De plus, en considérant la famille  $F_N = \llbracket -N, N \rrbracket \in \mathcal{P}_f(\mathbb{Z})$  pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\sum_{n \in F_N} x^{|n|} = \sum_{n=-N}^N x^{|n|} = \sum_{n=0}^N x^n + \sum_{n=1}^N x^n = \frac{1+x-2x^{N+1}}{1-x} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{1-x}$$

Comme  $x^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$  (puisque  $x \in ]0, 1[$ ), on a :

$$\sum_{n \in F_N} x^{|n|} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{1-x}$$

Comme on sait aussi que  $\frac{1+x}{1-x}$  majore  $S(u)$ , la caractérisation séquentielle de la borne supérieure nous permet de conclure que :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} x^{|n|} = \frac{1+x}{1-x}$$

**Proposition (sous-famille d'une famille sommable positive)** Soient  $(u_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$  une famille sommable et  $J \subset I$ . Alors :

- ★ la famille  $(u_i)_{i \in J}$  est sommable ;
- ★ on a l'inégalité  $\sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i$ .

**Démonstration** Posons  $u' = (u_i)_{i \in J}$  et :

$$S(u) = \left\{ \sum_{i \in F} u_i \mid F \in \mathcal{P}_f(I) \right\} \quad \text{et} \quad S(u') = \left\{ \sum_{i \in F} u_i \mid F \in \mathcal{P}_f(J) \right\}$$

Comme  $J \subset I$ , pour toute partie finie  $F$  de  $J$ ,  $F$  est aussi une partie finie de  $I$  donc  $\sum_{i \in F} u'_i \in S(u)$ . On en déduit, par définition de la borne supérieure, que :

$$\sum_{i \in F} u_i \leq \sup(S(u)) \quad \text{i.e.} \quad \sum_{i \in F} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i$$

L'ensemble  $S(u')$  est majoré par  $\sum_{i \in I} u_i$  (qui est un nombre réel par sommabilité de  $u$ ). Comme  $\sup(S(u'))$  est le plus petit majorant de  $S(u')$ , on a :

$$\sup(S(u')) \leq \sum_{i \in I} u_i \quad \text{i.e.} \quad \sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i,$$

d'où le résultat. ■

**Proposition (théorème de comparaison pour les familles positives)** Soient  $(u_i)_{i \in I}$  et  $(v_i)_{i \in I}$  deux familles de réels positifs telles que :

$$\forall i \in I, \quad u_i \leq v_i \tag{*}$$

Alors (l'inégalité a lieu dans  $[0, +\infty]$ ) :

$$\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i$$

**Remarque :** il n'y a pas besoin d'hypothèse de sommabilité des familles.

**Démonstration** Soit  $F \in \mathcal{P}_f(I)$ . D'après (\*), on a :

$$\sum_{i \in F} u_i \leq \sum_{i \in F} v_i \leq \sup(S(v))$$

Ceci entraîne que  $\sup(S(v))$  majore  $S(u)$ . Par définition de la borne supérieure, il vient :

$$\sup(S(u)) \leq \sup(S(v)) \quad i.e. \quad \sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i,$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

## 2) Sommabilité et sommes finies, sommabilité vs convergence de série

**Proposition (sommabilité et somme d'une famille finie positive)** Soit  $I = \{i_1, \dots, i_n\}$  un ensemble fini. Toute famille  $(u_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$  est sommable et :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k=1}^n u_{i_k}$$

**Démonstration** Soit  $(u_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$ . Par positivité de la suite, on a pour tout  $F \in \mathcal{P}(I)$  (une partie de  $I$  est finie car  $I$  est finie) :

$$\sum_{i \in F} u_i \leq \sum_{k=1}^n u_{i_k}$$

Donc  $\sum_{k=1}^n u_{i_k} \in \mathbb{R}_+$  majore  $S(u)$  donc  $u$  est sommable et  $\sup(S(u)) \leq \sum_{k=1}^n u_{i_k}$ . Ce majorant étant atteint pour

$F = I$ , on a  $\sup(S(u)) = \sum_{k=1}^n u_{i_k}$ , c'est-à-dire  $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k=1}^n u_{i_k}$ . ■

**Remarque :** ouf.

**Proposition (sommabilité et convergence de séries à termes positifs)** Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels positifs. Alors :

★ la famille  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable si et seulement si la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  converge ;

★ dans tous les cas, on a l'égalité :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n,$$

où on a posé  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$  si la famille  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas sommable.

**Démonstration** ★ Soient  $F \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$  et  $N = \max(F) \in \mathbb{N}$ . Si la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est convergente, alors par positivité de la suite  $u$ , on a :

$$\sum_{n \in F} u_n \leq \sum_{n=0}^N u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Comme  $S(u)$  est majoré par  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \in \mathbb{R}_+$ , la famille  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est sommable et, par définition de la borne supérieure, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Pour obtenir l'égalité, il suffit de remarquer que pour  $F_N = \llbracket 0, N \rrbracket$ , on a :

$$\sum_{n \in F_N} u_n = \sum_{n=0}^N u_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

D'après la caractérisation séquentielle de la borne supérieure, on a  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .

★ Réciproquement, si la série  $\sum_{n \geq 0} u_n$  diverge alors, comme il s'agit d'une série à termes positifs, on a (on pose encore  $F_N = \llbracket 0, N \rrbracket$ ) :

$$\sum_{n \in F_N} u_n = \sum_{n=0}^N u_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} +\infty$$

**Exemple** On a  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$  puisque la série harmonique est divergente.

### 3) Opérations sur les sommes

**Proposition (invariance de la somme par permutation)** Soient  $u = (u_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$  et  $\sigma : I \rightarrow I$  une bijection. Alors :

$$\sum_{i \in I} u_{\sigma(i)} = \sum_{i \in I} u_i \quad (\text{égalité dans } [0, +\infty])$$

En particulier, la famille  $(u_{\sigma(i)})_{i \in I}$  est sommable si et seulement si la famille  $(u_i)_{i \in I}$  l'est.

**Démonstration** On pose  $u_\sigma = (u_{\sigma(i)})_{i \in I}$ .

★ Soit  $F \in \mathcal{P}_f(I)$ . Alors  $G = \sigma(F) \in \mathcal{P}_f(I)$  donc (en utilisant le changement d'indice  $j = \sigma(i)$ , qui est licite car  $\sigma$  est injective) :

$$\sum_{i \in F} u_{\sigma(i)} = \sum_{j \in G} u_j \leq \sup(S(u))$$

par définition de la borne supérieure. Toujours par définition de la borne supérieure, on a :

$$\sup(S(u_\sigma)) \leq \sup(S(u)) \quad \text{i.e.} \quad \sum_{i \in I} u_{\sigma(i)} \leq \sum_{i \in I} u_i$$

★ Réciproquement, soient  $F \in \mathcal{P}_f(I)$  et  $H = \sigma^{-1}(F) \in \mathcal{P}_f(I)$ . En effectuant le changement d'indice  $j = \sigma^{-1}(i)$  (licite par bijectivité de  $\sigma$ ), on a :

$$\sum_{i \in F} u_i = \sum_{i \in F} u_{\sigma(\sigma^{-1}(i))} = \sum_{j \in H} u_{\sigma(j)} \leq \sup(S(u_\sigma))$$

et donc :

$$\sup(S(u)) \leq \sup(S(u_\sigma)) \quad \text{i.e.} \quad \sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} u_{\sigma(i)},$$

d'où l'égalité. ■

**Remarque :** en général, c'est faux pour une famille qui n'est pas positive. Par exemple, on a vu que la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$  est convergente de somme (notons la  $S$ ) égale à  $\ln(2)$ , ce qui s'écrit en extension :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \ln(2)$$

Ici, on ne peut pas modifier l'ordre des termes sans incidence. Par exemple, faisons des paquets de trois :

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) + \dots \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \dots + \left(\frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\right) \\ &= \frac{S}{2} \\ &= \frac{\ln(2)}{2} \end{aligned}$$

**Proposition (combinaison linéaire positive)** Soient  $u = (u_i)_{i \in I}, v = (v_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$  et  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ . Alors :

$$\sum_{i \in I} (u_i + \lambda v_i) = \sum_{i \in I} u_i + \lambda \sum_{i \in I} v_i \quad (\text{égalité dans } [0, +\infty])$$

**Démonstration** Soit  $F \in \mathcal{P}_f(I)$ . Par linéarité des sommes finies, on a :

$$\sum_{i \in F} (u_i + \lambda v_i) = \sum_{i \in F} u_i + \lambda \sum_{i \in F} v_i \leq \sup(S(u)) + \lambda \sup(S(v))$$

par définition de la borne supérieure et car  $\lambda \geq 0$ . Ainsi (toujours par définition de la borne supérieure) :

$$\sup(S(u + \lambda v)) \leq \sup(S(u)) + \lambda \sup(S(v)) \quad \text{i.e.} \quad \sum_{i \in I} (u_i + \lambda v_i) \leq \sum_{i \in I} u_i + \lambda \sum_{i \in I} v_i$$

Ensuite, par la caractérisation séquentielle de la borne supérieure dans  $[0, +\infty]$ , il existe des suites de sous-ensemble finis  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $I$  tels que :

$$\sum_{i \in F_n} u_i \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I} u_i \quad \text{et} \quad \sum_{i \in G_n} v_i \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I} v_i$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $F_n \subset F_n \cup G_n$  et la famille  $u$  est positive donc :

$$\sum_{i \in F_n} u_i \leq \sum_{i \in F_n \cup G_n} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i$$

Le théorème des gendarmes implique que :

$$\sum_{i \in F_n \cup G_n} u_i \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I} u_i$$

De même :

$$\sum_{i \in F_n \cup G_n} v_i \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I} v_i$$

On en déduit que :

$$\sum_{i \in F_n \cup G_n} (u_i + \lambda v_i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I} (u_i + \lambda v_i)$$

La caractérisation séquentielle de la borne supérieure permet de conclure quant à l'égalité souhaitée. ■

### 4) Sommation par paquets

**Théorème (de sommation par paquets positif)** Soient  $u = (u_i)_{i \in I}$  et  $(I_j)_{j \in J}$  une famille de sous-ensembles deux à deux disjoints de  $I$  tels que :

$$I = \bigsqcup_{j \in J} I_j$$

Alors :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I_j} u_i \quad (\text{égalité dans } [0, +\infty])$$

**Démonstration** admis ■

**Remarque :** lorsqu'on utilise ce résultat, on peut faire les calculs directement. La valeur finale obtenue (un réel positif ou  $+\infty$ ) permet de conclure quant à la sommabilité de la famille  $u$ .

**Exemple** ★ Soit  $x \in ]0, 1[$ . La famille  $u = (x^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$  est sommable.

**Justification.** On a  $\mathbb{Z} = (-\mathbb{N}^*) \sqcup \mathbb{N}$  donc, comme  $u$  est positive et d'après le théorème de sommation par paquets positifs, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x^{|n|} &= \sum_{n \in (-\mathbb{N}^*)} x^{|n|} + \sum_{n \in \mathbb{N}} x^{|n|} = \sum_{n \in (-\mathbb{N}^*)} x^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} x^n + \frac{1}{1-x} \quad (\text{théorème de permutation des termes}) \\ &= \frac{x+1}{1-x} \in \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

ce qu'on avait déjà obtenu.

★ Étudions la sommabilité de la famille  $u = \left( \frac{1}{(m+n)^3} \right)_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2}$  en considérant, pour tout  $d \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , l'ensemble  $I_d = \{(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \mid m+n = d\}$ .

On a bien :

$$\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* = \bigsqcup_{d \geq 2} I_d$$

et la famille  $u$  est positive donc, d'après le théorème de sommation par paquets positifs, on a :

$$\sum_{(m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2} \frac{1}{(m+n)^3} = \sum_{d=2}^{+\infty} \sum_{(m,n) \in I_d} \frac{1}{(m+n)^3} = \sum_{d=2}^{+\infty} \frac{|I_d|}{d^3} = \sum_{d=1}^{+\infty} \frac{d-1}{d^3} = \zeta(2) - \zeta(3) \in \mathbb{R}_+$$

donc la famille  $u$  est sommable et on vient d'obtenir sa somme.

Le résultat suivant est très pratique lorsque  $I$  s'écrit comme un produit cartésien.

**Corollaire (théorème de Fubini positif)** Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles non vides et  $(u_{m,n})_{(m,n) \in A \times B} \in (\mathbb{R}_+)^{A \times B}$ . Alors :

$$\sum_{(m,n) \in A \times B} u_{m,n} = \sum_{m \in A} \sum_{n \in B} u_{m,n} = \sum_{n \in B} \sum_{m \in A} u_{m,n}$$

**Démonstration** On remarque que :

$$I = \bigsqcup_{m \in A} (\{m\} \times B) = \bigsqcup_{n \in B} (A \times \{n\})$$

Il suffit ensuite d'appliquer le théorème de sommation par paquets. ■

**Exemple** ★ Soit  $x \in [0, 1[$ . Étudions la sommabilité de la famille  $u = (x^{p+q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ . Comme il s'agit d'une famille de nombres positifs, on a d'après le théorème de Fubini positif :

$$\begin{aligned} \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} x^{p+q} &= \sum_{p \in \mathbb{N}} \left( \sum_{q \in \mathbb{N}} x^p x^q \right) = \sum_{p \in \mathbb{N}} x^p \left( \sum_{q \in \mathbb{N}} x^q \right) = \sum_{p \in \mathbb{N}} x^p \left( \sum_{q=0}^{+\infty} x^q \right) \\ &= \sum_{p \in \mathbb{N}} x^p \times \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\geq 0} \\ &= \frac{1}{1-x} \sum_{p \in \mathbb{N}} x^p \quad (\text{linéarité positive de la somme}) \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

En particulier, la famille  $u$  est sommable.

★ Calculons la somme  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$ . On a :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n 1 = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \sum_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \quad (\text{théorème de Fubini positif}) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} 2 \times \frac{1}{2^k} \\ &= 2 \end{aligned}$$

★ Pour tout  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , on pose  $\zeta(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ . Calculer la somme  $T = \sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1)$ . On a :

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} = \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{k^n} \quad (\text{théorème de Fubini positif}) \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \end{aligned}$$

donc (somme télescopique) on a  $T = 1$ .

## II – Familles sommables à valeurs dans $\mathbb{C}$

On généralise ici la notion de famille sommable à une famille à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 1) Notions de sommabilité

**Définition (famille sommable, cas général)** Une famille  $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$  est dite *sommable* si la famille  $(|u_i|)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$  de réels positifs est sommable, c'est-à-dire si :

$$\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$$

On note  $\ell^1(I)$  l'ensemble des familles sommables complexes indexées par  $I$  i.e. :

$$\ell^1(I) = \left\{ (u_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I \mid \sum_{i \in I} |u_i| < +\infty \right\}$$

**Exemple** Si  $x \in \mathbb{C}$  est tel que  $|x| < 1$ , alors la famille  $(x^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$  est sommable. En effet, on a vu que si  $y \in [0, 1[$ , alors  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} x^{|n|} < +\infty$ .

**Remarques.**

- ★ Pour une famille de réels positifs  $(u_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$ , on retrouve la définition première de la sommabilité (puisque :  $\forall i \in I, |u_i| = u_i$  dans ce cas).
- ★ Si  $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$  est sommable et si  $J$  est une partie de  $I$ , alors la famille  $(u_i)_{i \in J}$  est sommable. En effet, on a vu que si  $\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$ , alors  $\sum_{i \in J} |u_i| < +\infty$ .
- ★ L'ensemble  $\ell^1(\mathbb{N})$  est celui des séries absolument convergentes (d'après le lien établi entre séries numériques et familles sommables).

**Exemple** Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , la famille  $\left(\frac{e^{in\theta}}{n^2}\right)_{n \geq 1}$  est sommable tandis que  $\left(\frac{e^{in\theta}}{n}\right)_{n \geq 1}$  ne l'est pas.

**Proposition (théorème de comparaison pour les familles sommables)** Soient  $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$  et  $(v_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}_+)^I$ . On suppose que :

- ★ la famille  $(v_i)_{i \in I}$  est sommable ;
- ★  $\forall i \in I, |u_i| \leq v_i$ .

Alors la famille  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable.

**Démonstration** D'après le théorème de comparaison pour les familles positives, on a :

$$\sum_{i \in I} |u_i| \leq \sum_{i \in I} v_i$$

Comme  $\sum_{i \in I} v_i < +\infty$ , on a  $\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$ , ce qui signifie que la famille  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable. ■

**Exemple** La famille  $\left(\frac{\sin(n)}{2^{|n|}}\right)_{n \in \mathbb{Z}}$  est sommable car la famille de nombres réels positifs  $\left(\frac{1}{2^{|n|}}\right)_{n \in \mathbb{Z}}$  l'est et car :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \left| \frac{\sin(n)}{2^{|n|}} \right| \leq \frac{1}{2^{|n|}}$$

## 2) Somme d'une famille sommable quelconque

**Notation** : si  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $x^+ = \max(0, x) \in \mathbb{R}_+$  et  $x^- = \max(0, -x) \in \mathbb{R}_+$ . On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x = x^+ - x^-, \quad |x| = x^+ + x^- \quad \text{et} \quad x^\pm \leq |x|$$

★ Si  $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$  est une famille sommable, alors d'après le théorème de comparaison positif, on a :

$$\sum_{i \in I} (u_i)^\pm \leq \sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$$

donc les familles positives  $(u_i^+)_{i \in I}$  et  $(u_i^-)_{i \in I}$  sont sommables.

★ Si maintenant  $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$  une famille sommable. Pour tout  $i \in I$ , on a  $|\operatorname{Re}(u_i)| \leq |u_i|$  donc, d'après le théorème de comparaison pour les familles sommables, la famille réelle  $(\operatorname{Re}(u_i))_{i \in I}$  est sommable. Il en va de même pour la famille  $(\operatorname{Im}(u_i))_{i \in I}$ .

Ceci nous permet de définir la somme d'une famille sommable réelle ou complexe.

**Définition (somme d'une famille sommable quelconque)** mable, on définit la somme de la famille par :

★ Si  $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$  est som-

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-$$

★ Si  $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$  est sommable, on pose :

$$\sum_{j \in I} \operatorname{Re}(u_j) + i \sum_{j \in I} \operatorname{Im}(u_j)$$

**Proposition** Soient  $(u_i)_{i \in I} \in \ell^1(I)$  et  $\varepsilon > 0$ . Alors il existe un sous-ensemble fini  $F_\varepsilon$  de  $I$  tel que :

$$\left| \sum_{i \in I} u_i - \sum_{i \in F_\varepsilon} u_i \right| \leq \varepsilon$$

**Démonstration** Soit  $\varepsilon > 0$ .

★ On se place dans le cas où  $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ . Comme  $(u_i)_{i \in I}$  est sommable, les familles de réels positifs  $(u_i^+)_{i \in I}$  et  $(u_i^-)_{i \in I}$  sont sommables. Notons  $S_+ \in \mathbb{R}$  et  $S_- \in \mathbb{R}$  leurs sommes respectives. Par définition de la borne supérieure, il existe deux parties finies  $F_+$  et  $F_-$  de  $I$  telles que :

$$(\forall i \in F_+, u_i > 0) \quad \text{et} \quad (\forall i \in F_-, u_i < 0)$$

et :

$$\left| \sum_{i \in F_+} u_i^+ - S_+ \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \left| \sum_{i \in F_-} u_i^- - S_- \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

En remplaçant  $F_+$  et  $F_-$  par  $F = F_+ \cup F_-$ , on a aussi :

$$\left| \sum_{i \in F} u_i - S_+ \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \left| \sum_{i \in F} u_i - S_- \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i \in I} u_i - \sum_{i \in F} u_i \right| &= \left| (S_+ - S_-) - \left( \sum_{i \in F} u_i^+ - \sum_{i \in F} u_i^- \right) \right| \\ &\leq \left| \sum_{i \in F_+} u_i - S_+ \right| + \left| \sum_{i \in F_-} u_i - S_- \right| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

★ Si  $(u_i)_{i \in I}$  est à valeurs complexes, on applique le point précédent aux familles sommables réelles  $(\operatorname{Re}(u_i))_{i \in I}$  et  $(\operatorname{Im}(u_i))_{i \in I}$  avec le choix  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} > 0$ . ■

**Proposition** Soient  $(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I} \in \ell^1(I)$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Alors :

- ★ la famille  $(u_i + \lambda v_i)_{i \in I}$  est sommable ;
- ★  $\sum_{i \in I} (u_i + \lambda v_i) = \sum_{i \in I} u_i + \lambda \sum_{i \in I} v_i$ .

**Démonstration** ★ Pour tout  $i \in I$ , on a :

$$|u_i + \lambda v_i| \leq |u_i| + |\lambda| |v_i|$$

Par hypothèse et par linéarité positive, la famille de réels positifs  $(|u_i| + |\lambda| |v_i|)_{i \in I}$  est sommable. D'après le théorème de comparaison pour les familles sommables, la famille  $(u_i + \lambda v_i)_{i \in I}$  est sommable.

★ admis ■

**Corollaire** L'ensemble  $\ell^1(I)$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

**Démonstration** C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente :  $\ell^1(I)$  est un  $\mathbb{C}$ -sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}^I$ . ■

### 3) Sommaton par paquets

**Théorème (de sommation par paquets général)** Soit  $(I_j)_{j \in J}$  une famille de sous-ensembles deux à deux disjoints de  $I$  telle que :

$$I = \bigsqcup_{j \in J} I_j$$

Soit  $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$  une famille *sommable*. Alors :

- (i) pour tout  $j \in J$ , la famille  $(u_i)_{i \in I_j}$  est sommable ;
- (ii) la famille  $\left( \sum_{i \in I_j} u_i \right)_{j \in J}$  est sommable.

De plus, on a l'égalité :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I_j} u_i \right)$$

Démonstration admis ■


**Corollaire (théorème de Fubini général)** Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles non vides et  $(u_{m,n})_{(m,n) \in A \times B} \in (\mathbb{C})^{A \times B}$  une famille *sommable*. Alors :

$$\sum_{(m,n) \in A \times B} u_{m,n} = \sum_{m \in A} \sum_{n \in B} u_{m,n} = \sum_{n \in B} \sum_{m \in A} u_{m,n}$$

En particulier, si  $(a_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$  et  $(b_{i'})_{i' \in I'} \in \mathbb{C}^{I'}$  sont des familles *sommables*, alors la famille  $(a_i b_{i'})_{(i,i') \in I \times I'}$  est sommable et :

$$\sum_{(i,i') \in I \times I'} a_i b_{i'} = \left( \sum_{i \in I} a_i \right) \left( \sum_{i' \in I'} b_{i'} \right)$$

**Remarque :** pour appliquer ces deux résultats avec une famille  $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$ , on commence par appliquer le résultat correspondant pour la famille positive  $(|u_i|)_{i \in I}$ . Ceci permettra d'affirmer que la famille initiale est sommable. On peut ensuite faire les calculs sans modules.

 **Exercice** Montrer que la famille  $u = \left( \frac{e^{2ik\pi/n}}{2^n} \right)_{\substack{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ n \geq k+1}}$  est sommable et calculer sa somme notée  $S$ .

**Solution.**

★ On étudie la sommabilité de la famille en appliquant le théorème de Fubini positif. Selon ce théorème, on a (les calculs ayant lieu dans  $[0, +\infty]$ ) :

$$\sum_{\substack{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ n \geq k+1}} \left| \frac{e^{2ik\pi/n}}{2^n} \right| = \sum_{\substack{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ n \geq k+1}} \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \underbrace{\sum_{n=k+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-(k+1)}}}_{=2} = 1 \in \mathbb{R}_+$$

La famille  $u$  est donc sommable.

★ D'après le théorème de Fubini général, on a maintenant :

$$S = \sum_{\substack{(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2 \\ n \geq k+1}} \frac{e^{2ik\pi/n}}{2^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} e^{i \frac{2k\pi}{n}}}_{=-1} = -\frac{1}{2}$$

### III – Produit de Cauchy

**Définition (produit de Cauchy)** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites complexes. On appelle produit de Cauchy des séries  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  la série  $\sum_{n \geq 0} w_n$  où le terme général est défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

En général, la convergence des séries  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  ne garantit pas celle du produit de Cauchy.

**Exemple** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ . La série alternée  $\sum_{n \geq 0} u_n$  est convergente.

Le produit de Cauchy  $\sum_{n \geq 0} w_n$  n'est cependant pas convergent car, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$w_n = (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$$

donc :

$$|w_n| = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \frac{2(n+1)}{n+1} = 2$$

Donc  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas vers 0, d'où la divergence (grossière) de la série produit de Cauchy.

**Proposition** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  telles que les séries  $\sum_{n \geq 0} u_n$  et  $\sum_{n \geq 0} v_n$  soient absolument convergentes. Alors le produit de Cauchy  $\sum_{n \geq 0} w_n$  de ces deux séries définit une série absolument convergente et on a l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

**Remarque :** en extension, cette égalité se réécrit

$$(u_0 + u_1 + u_2 + \dots)(v_0 + v_1 + v_2 + \dots) = \underbrace{u_0 v_0}_{i+j=0} + \underbrace{(u_0 v_1 + u_1 v_0)}_{i+j=1} + \underbrace{(u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0)}_{i+j=2} + \dots$$

**Démonstration** D'après le lien entre séries et familles sommables, les familles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont sommables. D'après le théorème de Fubini, la famille  $(u_p v_q)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$  est sommable et on a l'égalité :

$$\left( \sum_{p \in \mathbb{N}} u_p \right) \left( \sum_{q \in \mathbb{N}} v_q \right) = \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_p v_q$$

On applique maintenant le théorème de sommation par paquets. On écrit :

$$\mathbb{N}^2 = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \text{où} \quad I_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p + q = n\}$$

D'après ce théorème on peut écrire (par sommabilité de  $(u_p v_q)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ ) que :

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} u_p v_q = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \\ p+q=n}} u_p v_q = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{p=0}^n u_p v_{n-p} = \sum_{n \in \mathbb{N}} w_n,$$

la convergence de la dernière série étant assurée par le même théorème. ■

En utilisant le produit de Cauchy, on retrouve une propriété bien connue de l'exponentielle complexe.

**Corollaire (exp)** L'application :

$$\exp : \begin{cases} (\mathbb{C}, +) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*, \times) \\ z & \longmapsto & e^z \end{cases}$$

est un morphisme de groupes.

**Démonstration** Soient  $z, w \in \mathbb{C}$ . On sait que :

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{et} \quad e^w = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{w^n}{n!},$$

les séries définissant  $e^z$  et  $e^w$  étant absolument convergentes. Le produit de Cauchy de celles-ci est donc une série (absolument) convergente et on a l'égalité :

$$e^z e^w = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \times \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w}$$

en utilisant la formule du binôme de Newton. ■