

VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Table des matières

1	Notion de variable aléatoire	2
1.1	Définition et notations	2
1.2	Loi d'une variable aléatoire	2
1.3	Image d'une variable aléatoire par une application	4
2	Les lois usuelles	5
2.1	Loi uniforme	5
2.2	Loi de Bernoulli	5
2.3	Loi binomiale	6
3	Couples de variables aléatoires	6
3.1	Loi conjointe et lois marginales	6
3.2	Loi conditionnelle	8
3.3	Généralisation	8
4	Indépendance	8
4.1	Cas de deux variables aléatoires	8
4.2	Généralisation	9
5	Espérance	11
5.1	Définition	11
5.2	Espérance des lois usuelles	12
5.2.1	Variable constante	12
5.2.2	Loi uniforme	13
5.2.3	Loi de Bernoulli	13
5.2.4	Loi binomiale	13
5.3	Propriétés générales de l'espérance	13
5.4	Lien avec l'indépendance	15
6	Variance et écart-type	15
6.1	Définitions	15
6.2	Variance des lois usuelles	16
6.2.1	Cas des variables constantes	16
6.2.2	Loi de Bernoulli	16
6.2.3	Loi binomiale	16
6.3	Propriétés	17
7	Covariance	18
7.1	Définition	18
7.2	Propriétés	19

8 Inégalités probabilistes	20
8.1 Inégalité de Markov	20
8.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	21

Étant donnée une expérience aléatoire, on peut naturellement construire des applications qui à chaque issue de l'expérience associe une grandeur numérique.

Exemple On lance deux dés et on note X la somme des faces obtenues. L'univers associé à l'expérience est $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$. On a par exemple :

$$X((1, 1)) = 2 \quad \text{et} \quad X((2, 5)) = 7$$

On systématisé dans ce chapitre l'étude de telles applications.

Dans tout ce chapitre, (Ω, P) désigne un espace probabilisé fini.

I – Notion de variable aléatoire

1) Définition et notations

Définition (variable aléatoire, univers image) ★ On appelle *variable aléatoire sur* Ω toute application $X \in E^\Omega$, où E est un ensemble non vide.

★ On appelle *univers image de* X l'ensemble $X(\Omega)$ (*i.e.* l'image directe de Ω par X dans E).

Remarques :

- ★ Si $E = \mathbb{R}$, on dit que X est une variable aléatoire *réelle*.
- ★ Comme Ω est fini, l'univers image $X(\Omega)$ de X est un ensemble fini.

Exemple Pour le lancer de deux dés (exemple précédent), l'univers image de X est $X(\Omega) = \llbracket 2, 12 \rrbracket$.

Quelques notations. Soient $X : \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire, $x \in E$ et $A \subset E$. On notera :

- ★ $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$ l'événement :

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$$

- ★ $\{X = x\}$ ou $(X = x)$ l'événement :

$$X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$$

- ★ si $E \subset \mathbb{R}$, $\{X \leq x\}$ ou $(X \leq x)$ l'événement :

$$X^{-1}([-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$$

- ★ idem pour $(X > x)$, $(X \geq x)$ et $(X < x)$

Dans la suite, nous serons par exemple amené à calculer la probabilité $P(\{X \in A\})$, que nous noterons plus simplement $P(X \in A)$.

Exemple Pour le lancers de deux dés, on a par exemple :

$$(X = 4) = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\} \quad \text{et} \quad (X \leq 12) = \Omega$$

2) Loi d'une variable aléatoire

Définition (loi de X) Soit $X \in E^\Omega$ une variable aléatoire. On appelle *loi de X* l'application :

$$P_X : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & [0, 1] \\ A & \longmapsto & P(X \in A) \end{cases}$$

Remarques :

★ On a l'égalité $P_X = P \circ X^{-1}$ où $X^{-1} : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\Omega) \\ A & \longmapsto & X^{-1}(A) \end{cases}$.

★ La loi de X est complètement déterminée par distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in E}$ (appelée distribution de probabilités de X). En effet, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, alors :

$$P_X(A) = P(X \in A) = P\left(\bigsqcup_{x \in A} (X = x)\right) = \sum_{x \in A} P(X = x)$$

Exemple Pour le lancer des deux dés, la loi de X est :

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S = x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Dans la suite, E désigne un ensemble non vide.

Proposition Soit $X \in E^\Omega$. L'application P_X est une probabilité sur E .

Démonstration On vérifie les deux axiomes qui définissent une probabilité.

★ Comme X est à valeurs dans E , on a :

$$P_X(E) = P(X \in E) = P(\Omega) = 1$$

car P est une probabilité.

★ Soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tels que $A \cap B = \emptyset$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on a :

$$\begin{aligned} \omega \in (X \in A \cup B) &\iff X(\omega) \in A \cup B \iff X(\omega) \in A \text{ ou } X(\omega) \in B \\ &\iff \omega \in (X \in A) \cup (X \in B) \end{aligned}$$

On a donc l'égalité :

$$(X \in A \cup B) = (X \in A) \cup (X \in B)$$

De la même façon, on a :

$$(X \in A) \cap (X \in B) = (X \in A \cap B) = (X \in \emptyset) = \emptyset$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} P_X(A \cup B) &= P(X \in A \cup B) = P((X \in A) \sqcup (X \in B)) \\ &= P(X \in A) + P(X \in B) \\ &= P_X(A) + P_X(B) \end{aligned}$$

Finalement, P_X est une probabilité sur E . ■

Proposition Soit $X \in E^\Omega$. La famille $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. En particulier :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$$

Démonstration Les événements $(X = x)$, où $x \in X(\Omega)$, sont clairement deux à deux incompatibles. De plus, comme X prend ses valeurs dans $X(\Omega)$, on a bien l'égalité $\Omega = \bigcup_{x \in X(\Omega)} (X = x)$. Enfin :

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigsqcup_{x \in X(\Omega)} (X = x)\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x),$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

Définition (variables aléatoires de même loi) Deux variables aléatoires $X, Y \in E^\Omega$ sont dites de même loi, noté $X \sim Y$ si $P_X = P_Y$.

Remarques :

- ★ Si $X \sim Y$, alors $X(\Omega) = Y(\Omega)$.
- ★ Le fait que $X \sim Y$ n'implique pas que $X = Y$. Si deux joueurs lancent chacun un dé équilibré et qu'on note X et Y les résultats de chacun des deux joueurs, alors $P_X = P_Y$ mais $X \neq Y$.

3) Image d'une variable aléatoire par une application

Considérons une variable aléatoire $X \in E^\Omega$ sur Ω et une application $f \in F^E$ où F est un ensemble non vide. L'application :

$$f \circ X : \Omega \longrightarrow F$$

est alors une variable aléatoire sur Ω que l'on notera plus simplement $f(X)$.

Proposition La loi $P_{f(X)}$ de la variable aléatoire $f(X)$ est :

$$P_{f(X)} = P_X \circ f^{-1}$$

Démonstration Pour tout $A \in \mathcal{P}(F)$, on a :

$$P_{f(X)}(A) = P(f(X) \in A) = P(X \in f^{-1}(A)) = P_X(f^{-1}(A)) = (P_X \circ f^{-1})(A),$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

 **Exercice** Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant :

k	-2	-1	0	1	2	3
$P(X = k)$	0,15	0,2	0,3	0,1	0,05	0,2

Déterminer les lois de $Y = X + 5$ et de $Z = X^2$.

Proposition Soient $X, Y \in E^\Omega$ deux variables aléatoires sur E et $f \in F^E$ une application. Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

Démonstration On a :

$$P_{f(X)} = P_X \circ f^{-1} = P_Y \circ f^{-1} = P_{f(Y)},$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

II – Les lois usuelles

1) Loi uniforme


Définition (loi uniforme) Soient E un ensemble fini non vide et $X \in E^\Omega$. On dit que X suit la *loi uniforme sur E* , ce que l'on note $X \sim \mathcal{U}(E)$, si P_X est la probabilité uniforme, *i.e.* si :

$$\forall A \in \mathcal{P}(E), \quad P_X(A) = P(X \in A) = \frac{|A|}{|E|}$$

Remarque : si $E = \llbracket 1, n \rrbracket$, la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ est aussi notée $\mathcal{U}(n)$. Ainsi, dire que $X \sim \mathcal{U}(n)$ signifie que $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{n}$$

Exemple On lance un dé équilibré à 6 faces et on note X le numéro obtenu. Alors $X \sim \mathcal{U}(6)$.

 **Exercice** On considère un jeu de 32 cartes dans lequel on pioche une carte au hasard jusqu'à obtenir le valet de pique (on ne remet pas les cartes piochées dans le jeu). On note X la variable aléatoire réelle correspondant au nombre de tirages nécessaires à l'obtention du valet de pique. Montrer que X suit une loi uniforme.

2) Loi de Bernoulli

Définition (loi de Bernoulli) Soient $p \in [0, 1]$ et $X \in \mathbb{R}^\Omega$. On dit que X suit la *loi de Bernoulli de paramètre p* , noté $X \sim \mathcal{B}(p)$, si :

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \quad \text{et} \quad P(X = 1) = p$$

Remarques :

- ★ Comme P est une probabilité, on a nécessairement $P(X = 0) = 1 - p$.
- ★ On dit souvent que p est la probabilité de succès, le succès étant l'événement $(X = 1)$.

Exemple ★ On lance une pièce équilibrée et on note X la variable aléatoire qui vaut 1 si on obtient pile et 0 sinon. Alors $X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

- ★ Une urne contient 3 boules blanches et 7 noires. On tire au hasard une boule et on note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule est blanche et 0 sinon. Alors $Y \sim \mathcal{B}\left(\frac{3}{10}\right)$.
- ★ Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors $\mathbf{1}_A \sim \mathcal{B}(P(A))$.

Démonstration L'univers image de la variable aléatoire $\mathbf{1}_A$ est $\mathbf{1}_A(\Omega) = \{0, 1\}$ et :

$$(\mathbf{1}_A = 1) = \{\omega \in \Omega \mid \mathbf{1}_A(\omega) = 1\} = A$$

donc $P(\mathbf{1}_A = 1) = P(A)$. ■

3) Loi binomiale

Définition (loi binomiale) Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times [0, 1]$ et $X \in \mathbb{R}^\Omega$. On dit que X suit la *loi binomiale de paramètres n et p* , ce que l'on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, si :

- ★ $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$;
- ★ $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

Remarques :

- ★ La famille $\left(\binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \right)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est bien une distribution de probabilités sur $\llbracket 0, n \rrbracket$ car les éléments de famille sont des nombres positifs et car :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = (p + (1 - p))^n = 1$$

d'après la formule du binôme de Newton.

- ★ On a clairement $\mathcal{B}(1, p) = \mathcal{B}(p)$.

III – Couples de variables aléatoires

Définition Soit $C \in E^\Omega$ une variable aléatoire. On dit que X est un *couple de variables aléatoires* s'il existe deux ensembles non vides E_1 et E_2 tels que $E \subset E_1 \times E_2$.

On note alors $C = (X, Y)$ ce couple :

$$(X, Y) : \begin{cases} \Omega & \longrightarrow & E_1 \times E_2 \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{cases}$$

1) Loi conjointe et lois marginales

Définition (loi conjointe, lois marginales) Soit $(X, Y) \in (E_1 \times E_2)^\Omega$ un couple de variables aléatoires.

- ★ La loi $P_{(X,Y)}$ du couple (X, Y) est appelée *loi conjointe* du couple (X, Y) .
- ★ Les lois P_X et P_Y de X et de Y sont appelées les *lois marginales* du couple (X, Y) .

Remarques :

★ Comme pour toute variable aléatoire, la famille $((X = x) \cap (Y = y))_{(x,y) \in (X,Y)(\Omega)}$ est un système complet d'événements et on a :

$$\sum_{(x,y) \in (X,Y)(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = y)) = 1$$

★ La loi $P_{(X,Y)}$ est parfois représentée à l'aide d'un tableau à double entrée.

Exemple Soit (X, Y) le couple de variables aléatoires de loi conjointe :

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$
$X = 0$	0,1	0,3	0
$X = 1$	0	0,2	0,2
$X = 2$	0,1	0	0,1

Par exemple, $P((X, Y) = (0, 2)) = 0,1$ et on a ici :

$$(X, Y)(\Omega) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2)\}$$

Remarque : l'univers image $(X, Y)(\Omega)$ du couple est inclus dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ mais on n'a pas toujours égalité. Dans l'exemple ci-dessus, $(1, 0) \notin (X, Y)(\Omega)$.

Notation : si $(x, y) \in (X, Y)(\Omega)$, on écrira $P(X = x, Y = y)$ au lieu de $P((X, Y) = (x, y))$.

Proposition (détermination des lois marginales) Soit $(X, Y) \in (E_1 \times E_2)^\Omega$ un couple de variables aléatoires.

★ La loi de X est donnée par :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) \quad (\text{sommation par lignes})$$

★ La loi de Y est donnée par :

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y) \quad (\text{sommation par colonnes})$$

Démonstration Soit $x \in X(\Omega)$. Comme $((Y = y))_{y \in Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P((X = x) \cap (Y = y)) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y)$$

On procède de la même manière pour la deuxième loi marginale. ■

Exemple Les lois marginales du couple (X, Y) de l'exemple précédent sont données par :

	$Y = 0$	$Y = 1$	$Y = 2$	P_X
$X = 0$	0,1	0,3	0	0,4
$X = 1$	0	0,2	0,2	0,4
$X = 2$	0,1	0	0,1	0,2
P_Y	0,2	0,5	0,3	

Remarque : la loi conjointe détermine donc les lois marginales du couple mais la réciproque est fautive.

$X \setminus Y$	0	1	loi de X
0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
loi de Y	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	

$X \setminus Y$	0	1	loi de X
0	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
loi de Y	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	

2) Loi conditionnelle

Définition Soient $(X, Y) \in (E_1 \times E_2)^\Omega$ et $x \in X(\Omega)$. On appelle loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ l'application :


$$P_{Y|(X=x)} : \begin{cases} \mathcal{P}(Y(\Omega)) & \longrightarrow & [0, 1] \\ A & \longmapsto & P(B|X = x) \end{cases}$$

Remarques :

- ★ On définit de la même manière la loi conditionnelle $P_{X|Y=y}$ de X sachant $(Y = y)$ pour $y \in Y(\Omega)$.
- ★ On peut montrer que les lois conditionnelles sont des probabilités.
- ★ Pour tout $(x, y) \in (X, Y)(\Omega)$ on a (d'après la formule des probabilités composées) :

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y | X = x)$$

Connaissant la loi de X et les lois conditionnelles, on peut donc obtenir la loi conjointe du couple.

 **Exercice** On considère une urne contenant trois boules blanches et quatre boules rouges. On tire successivement et sans remise deux boules de l'urne. On note X_1 (respectivement X_2) la variable aléatoire qui vaut 1 si la première (respectivement deuxième) boule tirée est blanche et 0 sinon.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2) .
2. Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $(X_2 = 1)$.

3) Généralisation

La notion de couple se généralise au cas de n variables aléatoires X_1, \dots, X_n où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Il y a alors n lois marginales et on peut définir, de la même façon, la notion de loi conditionnelle. On dit que (X_1, \dots, X_n) est un vecteur aléatoire.

IV – Indépendance

1) Cas de deux variables aléatoires

Soient $X \in E^\Omega$ et $Y \in F^\Omega$ deux variables aléatoires sur Ω .

Définition (indépendance de deux variables aléatoires) On dit que X et Y sont *indépendantes* si pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \times \mathcal{P}(Y(\Omega))$, on a :

$$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)P(Y \in B),$$

c'est-à-dire :

$$P_{(X,Y)}(A \times B) = P_X(A)P_Y(B)$$

On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Exemple On lance successivement deux fois un dé et on note X et Y les résultats obtenus. Alors X et Y sont indépendantes.

Proposition Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

Démonstration On raisonne par double implication.

\Rightarrow Supposons que X et Y soient indépendantes. Soit $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Considérons les événements $A = \{x\} \in \mathcal{P}(X(\omega))$ et $B = \{y\} \in \mathcal{P}(Y(\Omega))$. Par indépendance de X et de Y , on a :

$$P((X \in \{x\}) \cap (Y \in \{y\})) = P(X \in \{x\})P(Y \in \{y\})$$

i.e. :

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

\Leftarrow Supposons maintenant que :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \times \mathcal{P}(Y(\Omega))$. Alors :

$$\begin{aligned} P((X, Y) \in A \times B) &= P\left(\bigsqcup_{(a,b) \in A \times B} ((X, Y) = (a, b))\right) \\ &= \sum_{(a,b) \in A \times B} P((X, Y) = (a, b)) \\ &= \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} P(X = a, Y = b) \\ &= \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} P(X = a)P(Y = b) \quad (\text{car } X \perp\!\!\!\perp Y) \\ &= \left(\sum_{a \in A} P(X = a)\right) \left(\sum_{b \in B} P(Y = b)\right) \\ &= P(X \in A)P(Y \in B) \end{aligned}$$

■

Proposition Soient $f \in G^E$ et $g \in H^F$ deux applications. Si X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Démonstration Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(f(X(\Omega))) \times \mathcal{P}(g(Y(\Omega)))$. Alors (par définition de l'image réciproque d'un ensemble par une application) :

$$\begin{aligned} P((f(X) \in A) \cap (g(Y) \in B)) &= P((X \in f^{-1}(A)) \cap (Y \in f^{-1}(B))) \\ &= P(X \in f^{-1}(A))P(Y \in f^{-1}(B)) \quad (\text{car } X \perp\!\!\!\perp Y) \\ &= P(f(X) \in A)P(g(Y) \in B), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

Exemple Par exemple, si X et Y sont des variables aléatoires réelles indépendantes, alors les variables $X^2 + 3$ et $\sin(Y)$ sont indépendantes.

2) Généralisation

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on considère un ensemble non vide E_k et une variable aléatoire $X_k \in E_k^\Omega$ sur Ω .

Définition (indépendance mutuelle) On dit que les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont *mutuellement indépendantes* si pour tout $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(X_1(\Omega)) \times \dots \times \mathcal{P}(X_n(\Omega))$, on a l'égalité :

$$P((X_1 \in A_1) \cap \dots \cap (X_n \in A_n)) = \prod_{k=1}^n P(X_k \in A_k)$$

i.e. :

$$P_{(X_1, \dots, X_n)}(A_1 \times \dots \times A_n) = P_{X_1}(A_1) \dots P_{X_n}(A_n)$$

Remarque : une telle famille de variables aléatoires peut modéliser une suite d'expériences aléatoires indépendantes.

On a la même caractérisation que pour deux variables aléatoires.

Proposition Les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont *mutuellement indépendantes* si et seulement si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \quad P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{k=1}^n P(X_k = x_k)$$

Démonstration La démonstration est analogue à celle pour deux variables aléatoires indépendantes. ■

Lemme (des coalitions) Soient $m \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$ et $f \in F^{E_1 \times \dots \times E_m}$, $g \in G^{E_{m+1} \times \dots \times E_n}$ des applications. Si les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes, alors les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Démonstration admise ■

Remarque : le résultat reste vrai si on considère plus de deux coalitions. Par exemple, si $X, Y, Z, T \in \mathbb{R}^\Omega$ sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, alors $\sin(X)$, Y^2 et $Z - T$ sont mutuellement indépendantes.

Proposition Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times]0, 1[$ et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$. Alors :

$$\sum_{k=1}^n X_k \sim \mathcal{B}(n, p)$$

Démonstration On utilise un raisonnement par récurrence sur le nombre n de variables aléatoires dans la somme. Si $n = 1$, il n'y a rien à démontrer puisque $\mathcal{B}(1, p) = \mathcal{B}(p)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété soit vraie pour n variables aléatoires et considérons $n + 1$ variables aléatoires mutuellement indépendantes X_1, \dots, X_n, X_{n+1} suivant toutes la loi $\mathcal{B}(p)$. Par hypothèse de récurrence, on a $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.

★ On a $(X_1 + \dots + X_n)(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et $X_{n+1}(\Omega) = \{0, 1\}$ donc :

$$(X_1 + \dots + X_n + X_{n+1})(\Omega) = \llbracket 0, n + 1 \rrbracket$$

★ Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme $((X_{n+1} = 0), (X_{n+1} = 1))$ est un système complet d'événements, on a d'après la formule de probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X_1 + \dots + X_{n+1} = k) &= P(X_1 + \dots + X_n = k, X_{n+1} = 0) + P(X_1 + \dots + X_n = k, X_{n+1} = 1) \\ &= P(X_1 + \dots + X_n = k)P(X_{n+1} = 0) + P(X_1 + \dots + X_n = k - 1)P(X_{n+1} = 1) \\ &= (1 - p) \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} + p \binom{n}{k-1} p^{k-1} (1 - p)^{n-k+1} \\ &= \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] p^k (1 - p)^{n+1-k} \\ &= \binom{n+1}{k} p^k (1 - p)^{n+1-k} \end{aligned}$$

en utilisant la formule du triangle de Pascal.

★ Il reste à vérifier l'égalité pour $k \in \{0, n + 1\}$. Les univers images des variables aléatoires X_1, \dots, X_{n+1} sont égaux à $\{0, 1\}$ donc :

$$\begin{aligned} P(X_1 + \dots + X_{n+1} = 0) &= P(X_1 = 0, \dots, X_{n+1} = 0) = P(X_1 = 0) \dots P(X_{n+1} = 0) \\ &= (1 - p)^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0} p^0 (1 - p)^{n+1-0} \end{aligned}$$

On procède de la même manière pour $k = n + 1$.

Finalement, $\sum_{k=1}^{n+1} X_k \sim \mathcal{B}(n + 1, p)$. ■

Interprétation : on répète n fois la même expérience et on s'intéresse à la réalisation d'un événement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. On dit qu'il y a succès lorsque A se réalise. En notant p la probabilité et X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès, on a $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Exemple Soient $N, r, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $r \leq N$. On considère une urne contenant N boules dont r sont rouges. On prélève n boules de l'urne avec remise. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de boules rouges obtenues. Alors $X \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{r}{N}\right)$.

V – Espérance

1) Définition

Définition (espérance) Soit $X \in \mathbb{R}^\Omega$ une variable aléatoire réelle.

★ On appelle *espérance de X* , notée $E(X)$ ou $\mathbb{E}(X)$, le nombre réel :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$$

★ On dit que X est *centrée* si $E(X) = 0$.

L'espérance de X est un *indicateur de position* : il s'agit de la valeur moyenne prise par la variable aléatoire (plus précisément, on pondère les valeurs prises par X par la probabilité d'occurrence correspondante).

Exemple ★ On lance un dé équilibré et on note X le numéro obtenu. Alors $E(X) = \frac{7}{2}$.

★ Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $X \sim \mathcal{U}(n)$, alors $E(X) = \frac{n+1}{2}$.

Démonstration Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $X \sim \mathcal{U}(n)$, alors $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$ et :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(X = k) = \frac{1}{n}$$

donc :

$$E(X) = \sum_{k=1}^n kP(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2},$$

d'où le résultat. ■

Le résultat suivant nous donne une autre expression de l'expression de l'espérance; il a surtout un intérêt théorique.


Proposition Soit $X \in \mathbb{R}^\Omega$ une variable aléatoire réelle. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$$

Démonstration Comme $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\}) &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in (X=x)} X(\omega)P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in (X=x)} xP(\{\omega\}) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \sum_{\omega \in (X=x)} P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

 **Exercice** Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Calculer $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A)$.

2) Espérance des lois usuelles

(a) Variable constante

Une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow E$ est dite constante s'il existe $e \in E$ tel que $P(X = e) = 1$ (il est équivalent de dire que $X(\Omega) = \{e\}$).

Proposition Si X est une variable aléatoire constante égale à e , alors $\mathbb{E}(X) = e$.

Démonstration On a effectivement $\mathbb{E}(X) = e \times P(X = e) = e$ (par définition de l'espérance). ■

Remarque : soit X une variable aléatoire (quelconque). En notant $\mathbb{E}(X)$ la variable aléatoire constante $\mathbb{E}(X)\mathbf{1}_\Omega$, on a l'égalité :

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X)$$

(b) Loi uniforme

Proposition Soit $X \sim \mathcal{U}(E)$, où $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ est un ensemble fini. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

Dans le cas particulier où $E = \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$$

Démonstration C'est immédiat. ■

Remarque : l'espérance de X est ici la moyenne arithmétique des valeurs prises par X .

(c) Loi de Bernoulli

Proposition Soient $p \in [0, 1]$ et $X \sim \mathcal{B}(p)$. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = p$$

Démonstration On a :

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) = p$$

(d) Loi binomiale

Proposition Soient $(n, p) \in [0, 1] \times \mathbb{N}^*$ et $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Alors :

$$\mathbb{E}(X) = np$$

Démonstration Par définition de l'espérance :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} p^{\ell} (1-p)^{n-1-\ell} \\ &= np(p + (1-p))^{n-1} \\ &= np, \end{aligned}$$

d'où le résultat. ■

3) Propriétés générales de l'espérance

Proposition Soient $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires.

- (i) si $X \geq 0$ (c'est-à-dire $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$), alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$ (*positivité de l'espérance*) ;
- (ii) pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}(X + \lambda Y) = \mathbb{E}(X) + \lambda \mathbb{E}(Y)$ (*linéarité de l'espérance*) ;
- (iii) si $X \leq Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$ (*croissance de l'espérance*) ;
- (iv) $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$;
- (v) La variable aléatoire X est centrée.

Démonstration (i) Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tels que $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ et alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n x_k \mathbb{P}(X = x_k) \geq 0$$

comme somme de produits de nombres positifs ou nuls.

(ii) On a :

$$\mathbb{E}(X + \lambda Y) = \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + \lambda Y(\omega)) \mathbb{P}(\{\omega\})$$

et il suffit d'utiliser la linéarité de la somme.

(iii) On a $Y - X \geq 0$ puis on utilise (i) et (ii).

(iv) D'après l'inégalité triangulaire pour les sommes, on a :

$$|\mathbb{E}(X)| = \left| \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) \right| \leq \sum_{x \in X(\Omega)} |x| \underbrace{\mathbb{P}(X = x)}_{\geq 0} = \mathbb{E}(|X|)$$

(v) Il suffit d'utiliser (iii). ■

Proposition (formule de transfert) Soient $X : \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbb{P}(X = x)$$

Démonstration On sait que $\{(X = x) \mid x \in X(\Omega)\}$ est un système complet d'événements donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(X)) &= \sum_{\omega \in \Omega} f(X(\omega)) \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\omega \in X^{-1}(\{x\})} f(X(\omega)) \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \sum_{\omega \in X^{-1}(\{x\})} \mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) \mathbb{P}(X = x), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

Remarques :

- ★ Un couple de variables aléatoires étant une variable aléatoire par définition, on a pour tout fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$:


$$\mathbb{E}(f(X, Y)) = \sum_{(x,y) \in (X,Y)(\Omega)} f(x, y) \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

- ★ L'espérance de $f(X)$ est donc complètement déterminée par la loi de X (il est donc inutile de déterminer la loi de $f(X)$).

 **Exercice** Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau suivant :

k	-2	-1	0	1	2	3
$P(X = k)$	0.15	0.2	0.3	0.1	0.05	0.2

Déterminer l'espérance de $Z = |X|$.

 **Exercice** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \sim \mathcal{U}(n)$. Déterminer $\mathbb{E}(X^2)$.

4) Lien avec l'indépendance

Proposition Soient $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles indépendantes. Alors :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Démonstration Le théorème de transfert nous donne (on considère la fonction $f : (x, y) \in (X, Y)(\Omega) \mapsto xy$) :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{((x,y) \in (X,Y)(\Omega))} xy\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \sum_{(x \in X(\Omega))} \sum_{(y \in Y(\Omega))} xy\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

d'où le résultat par linéarité de la somme. ■

Remarques :

- ★ Attention, la réciproque de la proposition est fautive. Par exemple, si X suit la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, alors $\mathbb{E}(X) = 0$ donc $\mathbb{E}(X)^2 = 0$, tandis que $\mathbb{E}(X^2) = 1$. Par contre, la variable aléatoire X n'est pas indépendante avec elle-même (calculer $\mathbb{P}(X = 1, X = -1)$ pour s'en convaincre).
- ★ Si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, alors on a aussi :

$$\mathbb{E}(X_1 \dots X_n) = \mathbb{E}(X_1) \dots \mathbb{E}(X_n)$$

On démontre ceci par récurrence.

VI – Variance et écart-type

1) Définitions

Définition (variance) Soit X une variable aléatoire réelle.

- ★ On appelle *variance de X* , notée $V(X)$, la quantité :

$$V(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) (\geq 0)$$

- ★ On appelle *écart-type de X* , noté $\sigma(X)$, la quantité :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

- ★ La variable aléatoire X est dite *réduite* si $V(X) = 1$.

Remarque : on dit que la variance est un paramètre de dispersion. Plus $V(X)$ est petit et plus, en moyenne, les valeurs de $(X - \mathbb{E}(X))^2$ sont petites. Ceci signifie que X prend des valeurs resserrées autour de sa valeur moyenne $\mathbb{E}(X)$.

Le résultat suivant permet un calcul pratique de la variance.


Proposition (formule de Kœnig-Huygens) Soit X une variable aléatoire réelle. Alors :

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

Démonstration Il suffit de faire le calcul (on utilise la linéarité de l'espérance) :

$$\begin{aligned} V(X) &= \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + \mathbb{E}(X)^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2, \end{aligned}$$

d'où la formule annoncée. ■

 **Exercice** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \sim \mathcal{U}(n)$. Déterminer $V(X)$.

2) Variance des lois usuelles

(a) Cas des variables constantes

Proposition Soit X une variable aléatoire. Alors $V(X) = 0$ si et seulement si $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$ (on dit que X est *presque sûrement constante*).

Démonstration D'après la formule de transfert :

$$V(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} \underbrace{(x - \mathbb{E}(X))^2}_{\geq 0} \mathbb{P}(X = x)$$

donc :

$$\begin{aligned} V(X) = 0 &\iff \forall x \in X(\Omega), \mathbb{P}(X = x) \text{ ou } x = \mathbb{E}(X) \\ &\iff \forall x \in X(\Omega) \setminus \{\mathbb{E}(X)\}, \mathbb{P}(X = x) = 0 \\ &\iff \mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1 \end{aligned}$$

car $\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = 1$. ■

(b) Loi de Bernoulli

Proposition Soient $p \in [0, 1]$ et $X \sim \mathcal{B}(p)$. Alors :

$$V(X) = p(1 - p)$$

Démonstration Comme $X(\Omega) = \{0, 1\}$, on a $X^2 = X$ et alors (formule de Kœnig-Huygens) :

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

(c) Loi binomiale

Proposition Soient $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times [0, 1]$ et $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. Alors :

$$V(X) = np(1 - p)$$

Démonstration On l'a fait dans la section précédente pour $n = 1$. On peut maintenant supposer que $n \geq 2$. On utilise la formule de Kœnig-Huygens :

$$\begin{aligned} V(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X(X - 1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \mathbb{E}(X(X - 1)) + np - n^2p^2 \end{aligned}$$

puisque $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. La formule de transfert nous donne :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X(X - 1)) &= \sum_{k=0}^n k(k - 1)\mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=2}^n (k - 1)k \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \\ &= n(n - 1) \sum_{k=2}^n \binom{n - 2}{k - 2} p^k (1 - p)^{n-k} \\ &= n(n - 1)p^2 \sum_{\ell=0}^{n-2} \binom{n - 2}{\ell} p^\ell (1 - p)^{n-2-\ell} \\ &= n(n - 1)p^2 (p + (1 - p))^{n-2} \\ &= n(n - 1)p^2 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$V(X) = n(n - 1)p^2 + np - n^2p^2 = np - np^2 = np(1 - p),$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

3) Propriétés

Proposition Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a :

- (i) $V(aX + b) = a^2V(X)$;
- (ii) $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.

Démonstration La formule (ii) est une conséquence immédiate de (i). Par définition de la variance d'une variable aléatoire, on a :

$$\begin{aligned} V(X) &= \mathbb{E}((aX + b) - \mathbb{E}(aX + b))^2 \\ &= \mathbb{E}(aX + b - a\mathbb{E}(X) - b)^2 \quad (\text{linéarité de l'espérance}) \\ &= a^2\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \quad (\text{linéarité de l'espérance}) \\ &= a^2V(X) \end{aligned}$$
■

Corollaire Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle telle que $V(X) > 0$. Alors la variable aléatoire $\frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{V(X)}}$ est centrée réduite.

Démonstration En notant Y cette variable aléatoire, on montre facilement que $\mathbb{E}(Y) = 0$ (linéarité de l'espérance) et $V(Y) = 0$ (en utilisant la proposition qui précède). ■

Exemple Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times]0, 1[$ et $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. La variable aléatoire $\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ est centrée réduite.

VII – Covariance

1) Définition

Définition (covariance) Soient $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles. On appelle *covariance* de X et Y la quantité :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)))$$

Remarques :

- ★ On a donc $\text{Cov}(X, X) = V(X)$.
- ★ Si $\text{Cov}(X, Y) = 0$, on dit que les variables aléatoires X et Y sont *décorrélées*.

On dispose d'une formule (de Kœnig-Huygens) permettant de calculer en pratique une covariance.

Proposition Soient $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles. Alors :

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Démonstration Il suffit de développer le membre de droite et d'utiliser la linéarité de l'espérance. ■

Remarque : on calcule $\mathbb{E}(XY)$ en utilisant la formule de transfert appliquée à la fonction $f : (x, y) \mapsto xy$.

 **Exercice** Soit (X, Y) le couple de variables aléatoire de loi conjointe :

$X \setminus Y$	2	3	4	loi de X
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{6}$
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
3	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
loi de Y	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	

Déterminer $\text{Cov}(X, Y)$.

Corollaire Si $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sont indépendantes, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Démonstration En effet, comme $X \perp\!\!\!\perp Y$, on a $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, d'où le résultat. ■

Remarque : attention, la réciproque est fautive. On peut avoir des variables aléatoires réelles X et Y non indépendantes et telles que $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Exemple Considérons $X \sim \mathcal{U}(\{-1, 0, 1\})$ (loi uniforme sur l'ensemble $E = \{-1, 0, 1\}$) et posons $Y = X^2$.

★ Les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes. En effet (par exemple) :

$$\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{9}$$


et :

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1, X = 0) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 0)$$

★ Par ailleurs, on a $XY = X^3 = X$ (puisque l'univers image de X est $\{-1, 0, 1\}$) donc :

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) = 0 = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

donc $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

 **Exercice** On tire deux boules simultanément dans une urne contenant 4 boules numérotées de 1 à 4. Soit X le plus petit des numéros obtenus et Y le plus grand. Déterminer la covariance de X et Y .

2) Propriétés

Proposition Soient X, X', Y et Y' des VAR alors la covariance est :

- symétrique : $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$
- bilinéaire :
 - ★ $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \text{cov}(\lambda X + X', Y) = \lambda \text{cov}(X, Y) + \text{cov}(X', Y)$
 - ★ $\forall \mu \in \mathbb{R}, \text{cov}(X, \mu Y + Y') = \mu \text{cov}(X, Y) + \text{cov}(X, Y')$
- positive : $\text{cov}(X, X) = V(X) \geq 0$

Démonstration C'est immédiat. ■

Proposition Soient $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deux variables aléatoires réelles. Alors :

- (i) $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$;
- (ii) $V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2 \text{Cov}(X, Y)$.

Si X et Y sont décorréélées (donc en particulier si $X \perp\!\!\!\perp Y$), alors :

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$$

Démonstration On démontre (i) (c'est le même calcul pour (ii)). On a :

$$V(X + Y) = \text{Cov}(X + Y, X + Y) = \text{Cov}(X, X) + \text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Y, X) + \text{Cov}(Y, Y)$$

par bilinéarité de la covariance. On conclut en utilisant la symétrie et le fait que $\text{Cov}(Z, Z) = V(Z)$. ■

On peut généraliser la formule précédente.

Proposition Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ des variables aléatoires réelles. Alors :

$$V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

En particulier, si les variables sont deux à deux décorréélées (ce qui est le cas si elles sont deux à deux indépendantes), alors :

$$V\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n V(X_k)$$

Démonstration Il suffit de faire le calcul. ■

Application : retour au calcul de la variance relative à la loi binomiale.

Remarquons que la variance d'une variable aléatoire ne dépend pas de la variable mais de sa loi. Or, on sait que si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$, alors $S = \sum_{k=1}^n X_k \sim \mathcal{B}(n, p)$. Les variables aléatoires X_1, \dots, X_n étant deux à deux indépendantes (donc décorréélées), la proposition précédente implique que :

$$V(S) = \sum_{k=1}^n V(X_k) = \sum_{k=1}^n p(1-p) = np(1-p)$$

On retrouve la formule obtenue par un calcul direct pour la variance d'une loi binomiale.

VIII – Inégalités probabilistes

1) Inégalité de Markov

Théorème (inégalité de Markov) Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs positives ou nulles. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}$$

Démonstration Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On a les inégalités :

$$\mathbf{1}_{X \geq t} \leq \mathbf{1}_{X \geq t} X \leq X$$

donc, par linéarité et croissance de l'espérance :

$$tE(\mathbf{1}_{X \geq t}) \leq E(X)$$

d'où le résultat en divisant par $t > 0$ et car $E(\mathbf{1}_{X \geq t}) = P(X \geq t)$. ■


Exemple Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Comme X est à valeurs positives, on a :

$$\forall t > 0, \quad P(X \geq t) \leq \frac{np}{t}$$

Remarques.

- ★ On s'attend à ce que la probabilité $P(X \geq t)$ soit d'autant plus faible que $E(X)$ (valeur moyenne prise par X) soit petite et t soit grand (puisque $t \in \text{longmapsto} P(X \geq t)$ est décroissante). L'inégalité de Markov précise quantitativement cette observation.
- ★ Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et pour toute variable aléatoire X , on a donc :

$$P(|X| \geq t) \leq \frac{E(|X|)}{t}$$

 **Exercice** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance $2n$ fois un dé équilibré et on note X le nombre de 6 obtenus. Estimer la probabilité qu'au moins la moitié des lancers aient donné un 6 à l'aide de l'inégalité de Markov.

Une solution

On répète $2n$ fois la même épreuve de Bernoulli (qui consiste à lancer un dé) dont le succès (à savoir obtenir un 6) a pour probabilité $\frac{1}{6}$ (le dé étant équilibré). La variable aléatoire X correspond au nombre de 6 obtenus donc $X \rightsquigarrow \mathcal{B}(2n, \frac{1}{6})$. La variable aléatoire X est donc positive et admet une espérance (qui vaut $\frac{n}{3}$) donc, d'après l'inégalité de Markov,

$$\forall \lambda > 0, \quad P(X \geq \lambda) \leq \frac{n}{3\lambda}$$

Pour $\lambda = n > 0$, on a :

$$P(X \geq n) \leq \frac{1}{3}$$

2) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème (inégalité de Bienaymé-Tchebychev) Soit X une variable aléatoire réelle. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a :


$$P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{V(X)}{t^2}$$

Démonstration Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. D'après l'inégalité de Markov, appliqué à la variable aléatoire $(X - E(X))^2$ qui est positive, et au réel $t^2 > 0$, on a :

$$P((X - E(X))^2 \geq t^2) \leq \frac{E((X - E(X))^2)}{t^2} = \frac{V(X)}{t^2}$$

On remarque ensuite que $((X - E(X))^2 \geq t^2) = (|X - E(X)| \geq t)$, d'où le résultat. ■

Remarque : On s'attend à ce que la probabilité $P(|X - E(X)| \leq t)$ soit petite quand t est grand (puisque $|X - E(X)|$ représente la distance de X à sa valeur moyenne) ou que la variance de X soit petite (ce qui signifie que, en moyenne, X prend des valeurs resserrées autour de $E(X)$). L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev précise quantitativement cette observation.

 **Exercice** On lance un dé équilibré. Combien de fois faut-il le lancer pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition du numéro 1 au cours de ces n lancers sera dans l'intervalle $\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{100}, \frac{1}{6} + \frac{1}{100}\right]$?