

MANIPULATIONS DE SOMMES ET DE PRODUITS

Table des matières

1	Coefficients binomiaux	1
1.1	Factorielle d'un entier positif	1
1.2	Notion de coefficient binomial	2
2	Sommes <i>simples</i>	3
2.1	Définition	3
2.2	Propriétés de la somme	4
2.3	Sommes usuelles à connaître	5
2.4	Formule du binôme de Newton	7
2.5	Factorisation de $a^n - b^n$	8
3	Sommes <i>doubles</i>	8
3.1	Sommes <i>rectangulaires</i>	8
3.2	Sommes <i>triangulaires</i>	9
4	Produits	11
4.1	Définition	11
4.2	Propriétés	11
4.3	Quelques produits à connaître	12

Notation. Si $p, q \in \mathbb{N}$ sont tels que $p \leq q$, alors on pose :

$$\llbracket p, q \rrbracket = \{p, p + 1, \dots, q\} \quad (\text{intervalle d'entiers})$$

Par exemple, $\llbracket 0, 3 \rrbracket = \{0, 1, 2, 3\}$.

Le but de ce chapitre est d'apprendre à manipuler deux symboles, à savoir \sum (somme) et \prod (produit).

I – Coefficients binomiaux

1) Factorielle d'un entier positif

Définition Soit n un entier naturel. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle factorielle n le nombre noté $n!$ défini par

$$n! = n \times (n - 1) \times \dots \times 2 \times 1$$

Par convention, $0! = 1$.

Remarque. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $(n + 1)! = (n + 1)n!$

Exemple (calcul des premières factorielles) On a $1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120$.

 **Exercice** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$. Simplifier au maximum les quantités suivantes :

$$a_n = \frac{(n+1)!}{(n-3)!} \qquad b_n = \frac{(n!)^2}{(n-2)!(n+1)!} \qquad c_n = \frac{2^{n+1}n!}{2^{2n}(n-2)!}$$

2) Notion de coefficient binomial

Définition Soit n un entier relatif. Pour tout entier relatif k , on définit le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ par :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \text{ ou } k < 0 \text{ ou } n < 0 \end{cases}$$

Exemple $\binom{4}{2} = 6, \binom{10}{3} = 120, \binom{5}{4} = 5$

Proposition (propriétés des coefficients binomiaux) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

- ★ On a $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ et :

$$\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$$
- ★ Symétrie des coefficients binomiaux : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- ★ Formule du pion : $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$
- ★ Triangle de Pascal : si $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

$n = 0$						1
$n = 1$					1	1
$n = 2$				1	2	1
$n = 3$			1	3	3	1
$n = 4$		1	4	6	4	1

Démonstration Il suffit d'écrire explicitement les coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$$

puis

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n+1}{k+1} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$$

et :

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
 &= \frac{k}{k} \times \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{n-k+1}{n-k+1} \\
 &= \frac{kn!}{k!(n+1-k)!} + \frac{(n-k+1)n!}{k!(n+1-k)!} \\
 &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \\
 &= \binom{n+1}{k}
 \end{aligned}$$

■

II – Sommes *simples*

1) Définition

Définition (somme simple) Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq q$ et $a_p, a_{p+1}, \dots, a_q \in \mathbb{R}$. La somme $a_p + a_{p+1} + \dots + a_q$ (dite *en extension*) se note $\sum_{k=p}^q a_k$, i.e. :

$$\sum_{k=p}^q a_k = a_p + a_{p+1} + \dots + a_q$$

Remarque. La variable k est dite *muette*. On peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre. Par exemple,

$$\sum_{k=p}^q a_k = \sum_{i=p}^q a_i = \sum_{j=p}^q a_j = \sum_{\ell=p}^q a_\ell$$

Exemple Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

- ★ $\sum_{k=1}^n 1 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ fois}} = n$
- ★ $a_2 + a_4 + a_8 + \dots + a_{2n} = \sum_{k=1}^n a_{2k}$
- ★ $\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = -\ln(n+1)$

Remarque (généralisation de la définition). Si A est une partie finie non vide de \mathbb{N} , alors on note $\sum_{k \in A} a_k$ la somme de tous les nombres a_k pour lesquels $k \in A$. Par exemple :

$$\sum_{k \in [1,3] \cup [5,8]} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$$

Par convention, on pose $\sum_{k \in \emptyset} a_k = 0$.

2) Propriétés de la somme

Dans la propriété suivante, on peut remplacer l'indice 0 par un indice $p \leq n$ quelconque.

Proposition (propriétés algébriques de la somme) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

★ **linéarité de la somme :**

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^n (\lambda a_k + b_k) = \lambda \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k$$

★ **relation de Chasles :**

$$\forall p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^p a_k + \sum_{k=p+1}^n a_k$$

★ **changement d'indice :**

$$\sum_{j=0}^n a_{j+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i, \quad \sum_{j=0}^n a_{j+2} = \sum_{i=2}^{n+2} a_i, \quad \text{etc.}$$

On dit qu'on a effectué le changement d'indice $i = j + 1$ (ou $j = i - 1$).

★ **Symétrie de la somme :**

$$\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n a_{n-k}$$

Démonstration ★ Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (\lambda a_k + b_k) &= (\lambda a_0 + b_0) + (\lambda a_1 + b_1) + \dots + (\lambda a_n + b_n) \\ &= (\lambda a_0 + \lambda a_1 + \dots + \lambda a_n) + (b_0 + b_1 + \dots + b_n) \quad (\text{la somme est commutative dans } \mathbb{R}) \\ &= \lambda(a_0 + a_1 + \dots + a_n) + (b_0 + b_1 + \dots + b_n) \quad (\text{on met } \lambda \text{ en facteur}) \\ &= \lambda \sum_{k=0}^n a_k + \sum_{k=0}^n b_k \end{aligned}$$

★ Il suffit d'écrire les sommes en extension.

★ On a :

$$\sum_{j=0}^n a_{j+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i$$

★ Il suffit d'écrire les sommes en extension. ■

Attention :

★ Il n'existe pas de formule pour un sommant qui s'écrit comme un produit ou un quotient :

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{b_k} \neq \frac{\sum_{k=0}^n a_k}{\sum_{k=0}^n b_k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n a_k b_k \neq \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) \times \left(\sum_{k=0}^n b_k \right)$$

★ Dans la somme $\sum_{k=0}^n a_{2k}$, on ne peut pas effectuer le changement d'indice $i = 2k$.

Exemple Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

★ $\sum_{k=0}^n (n - k) = \sum_{k=0}^n k$;

★ $a_0 + \sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k$;

★ $\sum_{k=0}^{2n} a_k - \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$.

3) Sommes usuelles à connaître

Proposition (somme à connaître) Soit $n \in \mathbb{N}$.

★ On a :

$$\sum_{k=1}^n 1 = n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n 1 = n + 1$$

Plus généralement, si $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, alors :

$$\sum_{k=p}^n 1 = n - p + 1$$

★ On a :

$$\sum_{k=0}^n k = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

★ **Somme des termes d'une suite géométrique**

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Alors :

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

Plus généralement, on a si $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$\sum_{k=p}^n x^k = x^p \times \frac{1 - x^{n-p+1}}{1 - x}$$

★ **Somme télescopique**

On a :

$$\sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$$

Démonstration ★ Soit $p \in \llbracket 0, p \rrbracket$. Alors (on écrit la somme en extension) :

$$\sum_{k=p}^n 1 = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n-p+1 \text{ termes}} = (n - p + 1) \times 1 = n - p + 1$$

Les deux premières sommes s'obtiennent en prenant $p = 0$ et $p = 1$ respectivement.

★ On écrit la somme en extension

$$S_n = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = n + (n-1) + \dots + 1$$

et en sommant les deux égalités, il vient

$$2S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n \text{ termes}} = n(n+1)$$

d'où le résultat.

Démontrons que, pour tout entier naturel n non nul, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

Pour tout entier naturel n non nul, notons \mathcal{P}_n la proposition : « $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

- si $n = 1$, alors $\sum_{k=1}^1 k^2 = 1$ tandis que $\frac{1 \times (1+1)(2+1)}{6} = 1$ donc la proposition \mathcal{P}_1 est vraie.
- soit $n \in \mathbb{N}^*$ pour lequel la proposition \mathcal{P}_n est vérifiée. Montrons qu'elle reste vérifiée au rang $n+1$. D'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 = (n+1) \times \frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)^2 && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= (n+1) \left(\frac{n(2n+1)}{6} + n+1 \right) \\ &= (n+1) \left(\frac{2n^2 + 7n + 6}{6} \right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

Donc la propriété \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

– Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition \mathcal{P}_n est vraie, ce qui établit le résultat.

★ Soit $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On va démontrer que $(1-x) \sum_{k=p}^n x^k = x^p(1-x^{n-p+1})$. On a :

$$\begin{aligned} (1-x) \sum_{k=p}^n x^k &= \sum_{k=p}^n x^k - \sum_{k=p}^n x^{k+1} \\ &= \sum_{k=p}^n x^k - \sum_{j=p+1}^{n+1} x^j && \text{(en faisant le changement de variables } j = k+1) \\ &= x^p - x^{n+1} \end{aligned}$$

d'où la formule annoncée.

★ Il suffit d'écrire la somme en extension. ■

Remarque : la valeur de la première somme nous dit essentiellement que dans l'intervalle $\llbracket p, n \rrbracket$, il y a $n-p+1$ entiers.

 **Exercice** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Calculer les sommes :

$$S = \sum_{k=1}^n (-2), \quad T = \sum_{\ell=2}^n \frac{(-1)^{\ell+1}}{3^{\ell+2}}, \quad U = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right), \quad V = \sum_{k=0}^n e^{3k} \quad \text{et} \quad W = \sum_{k=1}^n (6k^2 - 2k)$$

4) Formule du binôme de Newton

On sait que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{et} \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

La formule du binôme de Newton généralise ces formules.

Proposition (formule du binôme de Newton) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration On démontre cette formule à l'aide d'un raisonnement par récurrence. Pour tout entier naturel n , notons \mathcal{P}_n la proposition : « $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ ».

- ★ Si $n = 0$, alors $(a + b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$ donc la proposition \mathcal{P}_0 est vraie.
- ★ Supposons que la proposition \mathcal{P}_n soit vraie et démontrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, on a


$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n \\ &= (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \underbrace{\binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0}}_{=\binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1-0}} + \sum_{k=1}^n \underbrace{\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right]}_{=\binom{n+1}{k}} a^k b^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n}{n} a^{n+1} b^0}_{=\binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

Donc la propriété \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Finalement, pour tout entier naturel n , la proposition \mathcal{P}_n est vraie, ce qui établit le résultat. ■

Remarque : le triangle de Pascal permet de calculer les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour un exposant $n \in \mathbb{N}$ donné. Par exemple, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \quad \text{et} \quad (a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

 **Exercice** Calculer les sommes suivantes :

$$S = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \quad T = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} 2^k, \quad U = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k \quad \text{et} \quad V = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{2}{3^{k+1}}$$

5) Factorisation de $a^n - b^n$

On sait que

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

La propriété suivante généralise cette identité.

Proposition (identité remarquable) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$$

Démonstration On développe le produit $(a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$:

$$\begin{aligned} (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} &= a \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} - b \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a^{k+1} b^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{j=1}^n a^j b^{n-j} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k} \quad (\text{en posant } j = k + 1) \\ &= a^n - b^n \end{aligned}$$

■

 **Exercice** Pour $a, b, x \in \mathbb{R}$, factoriser les expressions $a^2 - b^2$, $x^3 - 1$ et $a^4 - b^4$.

III – Sommes doubles

1) Sommes rectangulaires

Soit $m, n \in \mathbb{N}$. On considère une famille de nombres réels $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ cette famille de nombres réels que l'on peut représenter sous la forme d'un tableau à m lignes et n colonnes où le nombre réel $a_{i,j}$ est situé sur la $i^{\text{ème}}$ ligne et sur la $j^{\text{ème}}$ colonne :

	1	2	...	j	...	n
1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$...	$a_{1,j}$...	$a_{1,n}$
2	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$...	$a_{2,j}$...	$a_{2,n}$
⋮						
i	$a_{i,1}$	$a_{i,2}$...	$a_{i,j}$...	$a_{i,n}$
⋮						
m	$a_{m,1}$	$a_{m,2}$...	$a_{m,j}$...	$a_{m,n}$

Définition

• La somme S des éléments de la famille $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ est notée $S = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j}$.

• Lorsque $m = n$, on note aussi cette somme $S = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}$.


Le calcul d'une somme double se ramène toujours au calcul de deux sommes simples.

Théorème

Pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ et pour toute famille $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ de nombres complexes, on a :

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m a_{i,j}$$

Démonstration C'est immédiat : on effectue une sommation par ligne pour la première somme, et par colonne pour la seconde. ■

 **Exercice** Calculer $S = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} (i + j)$.

Solution. On sait que $S = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (i + j)$ et par linéarité de la somme :

$$S = \sum_{i=1}^m \left(i \sum_{j=1}^n 1 + \sum_{j=1}^n j \right) = \sum_{i=1}^m \left(ni + \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

puis, à nouveau en utilisant la linéarité de la somme :

$$S = \sum_{i=1}^m \left(ni + \frac{n(n+1)}{2} \right) = n \sum_{i=1}^m i + \frac{n(n+1)}{2} \sum_{i=1}^m 1 = \frac{nm(m+1)}{2} + \frac{nm(n+1)}{2} = \frac{nm(n+m+2)}{2}$$

Remarque : si le terme général $a_{i,j}$ s'écrit sous la forme $a_{i,j} = b_i \times c_j$, alors la somme double correspondante est égale à :

$$S = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j} = \left(\sum_{i=1}^m b_i \right) \left(\sum_{j=1}^n c_j \right)$$

Par exemple :

$$\sum_{0 \leq i,j \leq n} i2^j = \frac{n(n+1)}{2} \times (2^{n+1} - 1)$$

2) Sommes triangulaires

Supposons maintenant que $m = n$. On veut ici calculer la somme des nombres réels $a_{i,j}$ mais seulement pour les indices i et j vérifiant $1 \leq i \leq j \leq n$. On peut noter $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ la famille correspondante. On peut la visualiser à l'aide du tableau suivant :

	1	2	...	i	...	n
1	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$...	$a_{1,i}$...	$a_{1,n}$
2		$a_{2,2}$...	$a_{2,i}$...	$a_{2,n}$
			\ddots			
i				$a_{i,i}$...	$a_{i,n}$
\vdots					\ddots	
n						$a_{n,n}$

Définition La somme S des éléments de la famille $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ est $S = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$.

On dispose du résultat suivant.


Théorème Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ une famille de nombres complexes. Alors

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{i,j}$$

Démonstration Il s'agit encore une fois de sommer soit par rapport aux lignes, soit par rapport aux colonnes. La somme des éléments présents sur la ligne $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ est :

$$a_i + a_{i+1} + \dots + a_n = \sum_{k=i}^n a_{i,k},$$

d'où la première formule annoncée. ■

 **Exercice** Calculer la somme $S = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 3i$.

Solution. D'après le théorème précédent, on a :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n 3i = \sum_{i=1}^n 3i \sum_{j=i}^n 1 = \sum_{i=1}^n 3i(n-i+1) \\ &= 3 \sum_{i=1}^n (in - i^2 + i) \end{aligned}$$

puis, en utilisant la linéarité de la somme, il vient :

$$\begin{aligned} S &= 3n \sum_{i=1}^n i - 3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \sum_{i=1}^n i = 3n \frac{n(n+1)}{2} - 3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3 \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Remarque : de la même manière, on a

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n a_{i,j} = \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}$$

IV – Produits

On peut adapter ce qu'on a vu sur les sommes simples pour les produits finis de nombres réels.

1) Définition

Définition Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$ et a_p, a_{p+1}, \dots, a_q des nombres réels. Le produit de ces nombres (dit *en extension*) $a_p \times a_{p+1} \times \dots \times a_q$ est noté $\prod_{k=p}^q a_k$, i.e. :

$$\prod_{k=p}^q a_k = a_p \times a_{p+1} \times \dots \times a_q$$


Remarque : plus généralement, si A est une partie finie non vide de \mathbb{N} , on note $\prod_{k \in A} a_k$ le produit des nombres a_k pour $k \in A$. Par exemple :

$$\prod_{k \in \llbracket 1, 2 \rrbracket \cup \llbracket 5, 8 \rrbracket} a_k = a_1 \times a_2 \times a_5 \times a_6 \times a_7 \times a_8$$

Par convention, on pose $\prod_{k \in \emptyset} a_k = 1$.

Exemple $\star a_2 a_4 \dots a_{2n} = \prod_{k=1}^n a_{2k}$

$$\star \prod_{k=1}^n n 3 = 3^n$$

 **Exercice** Calculer les produits suivants :

$$P = \prod_{k=1}^n (2k) \quad \text{et} \quad Q = \prod_{\ell=1}^n \left(1 + \frac{1}{\ell}\right) \quad (\text{produit telescopique})$$

Remarque (lien entre produit et somme). si a_0, \dots, a_n sont des nombres réels strictements positifs, alors

$$\sum_{k=0}^n \ln(a_k) = \ln \left(\prod_{k=0}^n a_k \right)$$

2) Propriétés

Proposition 1. Soient $p, q \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leq q$. Soient $a_p, \dots, a_q, b_p, \dots, b_q$ des nombres réels. Alors :

$$\left(\prod_{k=p}^q a_k \right) \left(\prod_{k=p}^q b_k \right) = \prod_{k=p}^q (a_k b_k)$$

2. Soient $p, q, m \in \mathbb{N}^3$ tel que $p \leq m < q$ et a_p, \dots, a_q des nombres réels. Alors :

$$\left(\prod_{k=p}^m a_k \right) \left(\prod_{k=m+1}^q a_k \right) = \prod_{k=p}^q a_k$$

Démonstration Il suffit d'écrire les produits en extension et, pour la première formule, de regrouper les termes. ■



3) Quelques produits à connaître

Proposition 1. Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$, on a $\prod_{k=1}^p x = x^p$ et plus généralement, pour tout

$$p, q \in \mathbb{N} \text{ tels que } p \leq q, \text{ on a } \prod_{k=p}^q x = x^{q-p+1}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\prod_{k=1}^n k = n!$

Démonstration Il suffit d'expliciter les produits. ■

  **Exercice** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Calculer le produit $S = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.