Éléments de théorie des ensembles

I – Généralités sur les ensembles

1) Notion d'ensemble

Définition (notion d'ensemble) On appelle *ensemble* toute collection non ordonnée d'objets, appelés *éléments*.

Soit E un ensemble non vide. On écrit :

- $x \in E$ si x appartient à l'ensemble E ;
- $x \notin E$ si x n'appartient pas à l'ensemble E.

Remarques. Dans l'écriture $E = \{1, 2, 3\}$, l'ordre des éléments n'a aucune importance. Ainsi, $E = \{2, 1, 3\}$ ou $E = \{3, 2, 1\}$.

Axiome/définition (ensemble vide $\varnothing$) Il existe un unique ensemble ne contenant aucun élément. On l'appelle *ensemble vide* et on le note $\varnothing$.

Exemple $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 < 0\} = \varnothing$

Remarque : il existe plusieurs manières de définir un ensemble. On peut :

- ⋆ lister les éléments de l'ensemble :

  Exemple $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ou $F = \{-1, 1\}$ ou $G = \{x^4, x^6, x^8, x^{10}\}$

- ⋆ caractériser l'ensemble par une propriété (on dit que l'on écrit l'ensemble *en compréhension*) :

  Exemple $E = \{n \in \mathbb{N} \,|\, 1 \leqslant n \leqslant 5\}$, $F = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 = 1\}$ ou :

$$G = \{x^{2k} \,|\, k \in [\![2, 5]\!]\} = \left\{y \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists\, k \in \{2, 3, 4, 5\} \,\middle|\, y = x^{2k}\right\}$$

2) Ensembles et inclusion

Définition (inclusion) Soient E et F deux ensembles. On dit que F est un *sous-ensemble* de E (ou que F est une *partie* de E), et on note $F \subset E$, si tout élément de F est aussi un élément de E.

Remarques.

- ⋆ On a donc $F \subset E \iff \big(\forall x,\ x \in F \Longrightarrow x \in E\big)$.
- ⋆ Pour tout ensemble E, on a $\varnothing \subset E$. En effet, l'assertion :

$$\forall x,\ x \in \varnothing \Longrightarrow x \in E$$

est vraie puisque la proposition $\mathscr{P}$: $x \in \varnothing$ est fausse.

Exemple $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{1, 2\}$ et $G = \{3, 4\}$.

- L'ensemble F est constitué des entiers 1 et 2 et ces deux entiers appartiennent à l'ensemble E. On en conclut que F est un sous-ensemble de E (c'est-à-dire $F \subset E$).
- Par contre, $4 \in G$, et $4 \notin E$. Donc G n'est pas une partie de E (c'est-à-dire $G \not\subset E$).

La relation d'inclusion vérifie les propriétés élémentaires suivantes.

Proposition ($\subset$ est une relation d'ordre) La relation $\subset$ est :

- ⋆ *réflexive* c'est-à-dire : pour tout ensemble A, on a $A \subset A$;
- ⋆ *antisymétrique* c'est-à-dire : pour tous ensembles A et B, alors :

$$(A \subset B \text{ et } B \subset A) \Longrightarrow A = B$$

- ⋆ *transitive* c'est-à-dire : pour tous ensembles A, B et C, alors :

$$A \subset B \text{ et } B \subset C \Longrightarrow A \subset C$$

On dit que $\subset$ est une *relation d'ordre*.

Démonstration immédiat ■

Remarque : si A et B sont deux ensembles, on n'a pas nécessairement :

$$A \subset B \text{ ou } B \subset A$$

Par exemple, dans $\mathbb{N}$, il suffit de considérer les sous-ensembles $A = \{0\}$ et $B = \{1\}$.
On dit que la relation d'ordre $\subset$ n'est pas *totale*.

3) Comment montrer qu'un ensemble est inclus dans un autre ?

Pour montrer qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F, on considère un élément x quelconque de E et on démontre qu'il appartient à F. Ce qui a été démontré pour cet élément x étant valable quelque soit le choix de l'élément de E, on en déduit que tous les éléments de E appartiennent à F.

Rédaction. Soit $x \in E$. Montrons que $x \in F$. On démontre que $x \in F$. On conclut : $E \subset F$.

✎✎✎ **Exercice** On considère les ensembles :

$$E = \big\{x, y \in \mathbb{R} \,\big|\, 2x - y = 1\big\} \qquad \text{et} \qquad F = \big\{(t+1, 2t+1) \,\big|\, t \in \mathbb{R}\big\}$$

Montrer que $F \subset E$.

4) Comment démontrer que deux ensembles sont égaux ?

La propriété d'antisymétrie de la relation $\subset$ nous donne une méthode pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux. En effet, il suffit de montrer que $E \subset F$ et $F \subset E$. **On dit qu'on raisonne par double inclusion.**

Rédaction. Soit $x \in E$. Montrons que $x \in F$. On démontre que $x \in F$. On a donc : $E \subset F$. Soit $x \in F$. Montrons que $x \in E$. On démontre que $x \in E$. On a donc : $F \subset E$ Conclusion : $E = F$

✎✎✎ **Exercice** Montrer que les ensembles E et F de l'exercice précédent sont égaux.

5) Les ensembles de nombres à connaître

- ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, 101, \dots\}$
- ensemble des entiers naturels non nuls $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots, \}$
- ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{\dots, -2013, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ou encore :
$$\mathbb{Z} = \left\{a - b \,\middle|\, a, b \in \mathbb{N}\right\}$$
- ensemble des nombres relatifs $\mathbb{Q} = \{\text{quotients de deux entiers relatifs}\} = \left\{\frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^*\right\}$
- ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ (et $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+^*$, *etc.*)
- ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ ($\mathrm{i}^2 = -1$)

On a les inclusions :
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

II – Opérations sur les parties d'un ensemble

1) Intersection, réunion, complémentaire et différence

Définition (intersection, réunion, complémentaire et différence) Soient E un ensemble et A, B deux parties de E.

1. L'*intersection* de A et de B, notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à la fois à A et à B.
$$A \cap B = \left\{x \in E \,\middle|\, x \in A \text{ et } x \in B\right\}$$
2. L'*union* (ou *réunion*) de A et de B, notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ou à B (c'est-à-dire qui appartiennent à A, à B ou aux deux à la fois).
$$A \cap B = \left\{x \in E \,\middle|\, x \in A \text{ ou } x \in B\right\}$$
3. Le *complémentaire* de A dans E, noté $\overline{A}$ ou ${}^cA$ ou $E \setminus A$, est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.
$$\overline{A} = \left\{x \in E \,\middle|\, x \notin A\right\}$$
4. On appelle *différence* de A et B, notée $A \setminus B$ le sous-ensemble de E suivant :
$$A \setminus B = \left\{x \in A \,\middle|\, x \notin B\right\}$$

Exemple — $\{1, 2\} \cup \{2, 7\} = \{1, 2, 7\}$

— $\{1,2\} \cap \{2,7\} = \{2\}$
— $\{1,3\} \cap \{2,7\} = \varnothing$
— $\{1,2,3\} \setminus \{1,4,5\} = \{2,3\}$

Remarques.
Si A, B et C sont trois sous-ensembles d'un ensemble E, alors on a :

★ $A \setminus A = \varnothing$, $A \setminus \varnothing = A$;
★ $A \setminus B = A \cap \overline{B}$;
★ $A \cap B \subset A \subset A \cup B$;
★ $\begin{cases} A \subset C \\ B \subset C \end{cases} \Longrightarrow A \cup B \subset C$;
★ $\begin{cases} A \subset B \\ A \subset C \end{cases} \Longrightarrow A \subset B \cap C$;
★ $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup \varnothing = A$;
★ $A \cap E = A$ et $A \cup E = E$.

✎✎✎ **Exercice** Dans $\mathbb{R}$, on considère les sous-ensembles $A = [0,1[$ et $B = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Déterminer $A \setminus B$, $\overline{A} \cup B$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$.

On peut généraliser la réunion et l'intersection à une famille de parties d'un ensemble. Soient E un ensemble, I une famille d'indice (par exemple $I = [\![0,10]\!]$ ou $I = \mathbb{N}$) et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de E (ce qui signifie que : $\forall i \in I,\ A_i \subset E$).

1. On définit la réunion de la famille $(A_i)_{i\in I}$, notée $\bigcup_{i\in I} A_i$, par :

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \left\{x \in E \,\middle|\, \exists i \in I,\ x \in A_i\right\}$$

2. On définit l'intersection des ensembles $(A_i)_{i\in I}$, notée $\bigcup_{i\in I} A_i$, par :

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \left\{x \in E \,\middle|\, \forall i \in I,\ x \in A_i\right\}$$

✎✎✎ **Exercice** Calculer $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right[$ et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right]$.

Solution. On trouver $[0,1[$ puis $\{0\}$.

Les propriétés des opérations $\cup$, $\cap$, du complémentaire et de la différence sont les suivantes.

Proposition (propriétés des opérations $\cup$, $\cap$, $\bar{\ }$ et $\setminus$) Soient E un ensemble et A, B, C trois sous-ensembles de E.

1. Si $A \subset B$ et $B \subset A$, alors $A = B$.
2. **Idempotence :** $A \cup A = A$ et $A \cap A = A$.
3. **Commutativité :** $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$.
4. **Associativité :** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
5. **Distributivité de l'union sur l'intersection :** $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

6. **Distributivité de l'intersection sur l'union :** $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
7. **Involution :** $\overline{\overline{A}} = A$.
8. **Les lois de De Morgan :**

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \text{et} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

et :

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \qquad \text{et} \qquad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Démonstration (de l'associativité de $\cup$ sur $\cap$ et de la première loi de De Morgan)

1. Montrons l'égalité $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cup C &\iff (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } x \in C \\ &\iff (x \in A \text{ ou } x \in C) \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \\ &\iff x \in (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{aligned}$$

Ceci montre donc que $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

2. Montrons que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cap B} &\iff x \notin (A \cap B) \\ &\iff \text{non } (x \in A \cap B) \\ &\iff \text{non } (x \in A \text{ et } x \in B) \\ &\iff \text{non } (x \in A) \text{ ou non } (x \in B) \\ &\iff x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\iff x \in \overline{A} \text{ ou } x \in \overline{B} \\ &\iff x \in \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned}$$

d'où l'égalité $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. ■

✎✎✎ **Exercice** Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Simplifier l'ensemble suivant :

$$X = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C})$$

✎✎✎ **Exercice** Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E. Montrer que

$$\begin{cases} A \cup C \subset B \cup C \\ A \cap C \subset B \cap C \end{cases} \iff A \subset B$$

✎✎✎ **Exercice** Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E. Montrer l'équivalence

$$A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$$

2) Produit cartésien d'ensembles

Définition (produit cartésien d'ensembles) Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et de F, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples constitués d'un élément de E et d'un élément de F.

$$E \times F = \{(e, f) \mid e \in E \text{ et } f \in F\}$$

Attention : l'ordre des coordonnées est important ! Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, le point de coordonnées $(1, 2)$ est différent du point de coordonnées $(2, 1)$.

Exemple 1. Soient $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$. Alors

$$E \times F = \big\{(x, y) \,\big|\, x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\big\} = \mathbb{R}^2$$

2. Soient $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2\}$. Alors

$$E \times F = \big\{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\big\}$$

On peut généraliser le produit cartésien à une famille finie d'ensembles.

Définition (produit cartésien d'une famille finie d'ensembles) Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ (*i.e.* $n \geqslant 2$) et $E_1, \ldots, E_n$ des ensembles.

- ⋆ On définit le produit cartésien de la famille d'ensembles $E_1, \ldots, E_n$ par

$$E_1 \times \cdots \times E_n = \big\{(e_1, \ldots, e_n) \,\big|\, e_1 \in E_1, \ldots, e_n \in E_n\big\}$$

- ⋆ Dans le cas où $E_1 = \cdots = E_n = E$, on pose :

$$\underbrace{E \times \cdots \times E}_{n \text{ fois}} = E^n$$

Un élément de E^n est alors appelé un n-uplet ou une n-liste d'éléments de E.

Exemple Un élément de $\mathbb{R}^3$ est un triplet (x, y, z) où $x, y, z \in \mathbb{R}$. Par exemple, $(1, \pi, 1) \in \mathbb{R}^3$.

III – Ensemble des parties d'un ensemble

Commençons par définir l'ensemble des parties d'un ensemble.

Définition (ensemble $\mathscr{P}(E)$) Soit E un ensemble. On appelle *ensemble des parties de l'ensemble* E, l'ensemble noté $\mathscr{P}(E)$, défini par :

$$\mathscr{P}(E) = \big\{X \,\big|\, X \subset E\big\}$$

Autrement dit, pour tout ensemble X, on a l'équivalence :

$$X \in \mathscr{P}(E) \iff X \subset E$$

- ⋆ Les éléments de $\mathscr{P}(E)$ sont donc des ensembles (ce sont les sous-ensembles de E).
- ⋆ Quelque soit l'ensemble E, on a toujours $\varnothing \in \mathscr{P}(E)$ et $E \in \mathscr{P}(E)$ (car $\varnothing \subset E$ et $E \subset E$).

Exemple 1. $\mathscr{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$

2. $\mathscr{P}(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
3. L'ensemble des parties de l'ensemble $E = \{0, 1\}$ est

$$\mathscr{P}(E) = \Big\{\varnothing, \{0\}, \{1\}, E\Big\}$$

4. L'ensemble des parties de l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ est

$$\mathscr{P}(E) = \Big\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\Big\}$$

IV – Recouvrement disjoint et partition d'un ensemble

Définition (recouvrement disjoint, partition) Soient E un ensemble, I un ensemble non vide d'indices (fini ou infini) et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de sous-ensembles de E. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un *recouvrement disjoint de* E si :

- ⋆ $\forall (i,j) \in I^2,\ i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$;
- ⋆ $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = E$.

On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E s'il cette famille est un recouvrement disjoint de E et si :

- ⋆ $\forall i \in I,\ A_i \neq \varnothing$.

Exemple — $\big([n, n+1[\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une partition de $\mathbb{R}$;

— $\big([-n, n]\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est est pas une.