

# DÉNOMBREMENT

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Ensemble fini et cardinal</b>	<b>1</b>
1.1	Définitions et exemples . . . . .	1
1.2	Cardinal d'un sous-ensemble . . . . .	2
1.3	Injections et surjections entre ensembles finis . . . . .	2
1.4	Cardinal d'une réunion d'ensembles, du complémentaire d'un ensemble . . . . .	3
1.4.1	Cardinal d'une réunion disjointe . . . . .	3
1.4.2	Cardinal d'une réunion de deux ensembles . . . . .	4
1.5	Cardinal d'un produit cartésien . . . . .	5
1.6	Nombre d'applications entre deux ensembles finis . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Arrangements et combinaisons</b>	<b>6</b>
2.1	Arrangement et nombre d'injections . . . . .	6
2.2	Permutations et nombre de bijections . . . . .	7
2.3	Combinaisons et nombre de sous-ensembles . . . . .	8
2.4	Nombre de parties d'un ensemble fini . . . . .	9
2.5	Formules du triangle de Pascal et du binôme de Newton : preuves par dénombrement . . . . .	10

Dans ce chapitre, nous allons « apprendre à compter » afin d'aborder des questions telles que :

- ★ Avec un jeu de 32 cartes, combien peut-on former de mains de 5 cartes constituées de 3 piques exactement et d'un roi exactement ?
- ★ Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Combien existe-t-il de couples  $(X, Y)$  de parties disjointes de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  ?
- ★ Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Combien existe-t-il de couples  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $x + y = p$  ?
- ★ Combien d'anagrammes peut-on former à partir du mot PEPITO ?

## I – Ensemble fini et cardinal

### 1) Définitions et exemples

Les définitions mathématiques d'ensembles finis et de cardinal sont les suivantes.

**Définition/théorème (ensemble fini et cardinal)** Soit  $E$  un ensemble.

- ★ On dit que  $E$  est un ensemble *fini* s'il est vide ou s'il existe un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  et une application bijective de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  sur  $E$ . Sinon, on dit que  $E$  est un ensemble infini.
- ★ Si  $E$  est un ensemble fini non vide, l'entier  $n$  dans la définition précédente est uniquement déterminé. Il est appelé *cardinal* de  $E$  et il est noté  $|E|$  ou  $\text{Card}(E)$ .
- ★ Par convention,  $|\emptyset| = 0$ .

**Démonstration** On admettra l'unicité de l'entier  $n$ . ■

**Exemple** Soient  $p, q \in \mathbb{N}$  tels que  $p \leq q$ . L'ensemble  $\llbracket p, q \rrbracket$  est fini de cardinal  $q - p + 1$ .

**Démonstration** On vérifie facilement que l'application :

$$\varphi : \begin{cases} \llbracket 1, q - p + 1 \rrbracket & \longrightarrow & \llbracket p, q \rrbracket \\ k & \longmapsto & k + p - 1 \end{cases}$$

est bijective, ce qui permet de conclure. ■

**Remarques :**

- ★ Le cardinal est *intuitivement* le nombre d'éléments de l'ensemble.
- ★ Dénombrer un ensemble fini, c'est déterminer le nombre d'éléments de cet ensemble.
- ★ Dans toute la suite, on ne considèrera que des ensembles finis non vides (et on interprètera le cardinal comme le nombre d'éléments de l'ensemble).

**Exemple** ★ L'ensemble  $\mathcal{A} = \{A, B, C, \dots, Z\}$  des lettres de l'alphabet est un ensemble fini de cardinal 26.

- ★ L'ensemble  $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$  est un ensemble fini de cardinal 9.
- ★ L'ensemble  $\mathbb{N}$  est infini.

## 2) Cardinal d'un sous-ensemble

**Proposition** Soient  $E$  un ensemble fini et  $F$  un sous-ensemble de  $E$ . Alors :

- ★ l'ensemble  $F$  est fini et  $|F| \leq |E|$ ;
- ★  $F = E$  si et seulement si  $|F| = |E|$ .

**Démonstration** admise ■

## 3) Injections et surjections entre ensembles finis

**Proposition (cardinal et application)** Soient  $E, F$  deux ensembles finis et  $f \in F^E$ .

- ★ Si  $f$  est injective, alors  $|E| \leq |F|$ .
- ★ Si  $f$  est surjective, alors  $|E| \geq |F|$ .
- ★ Si  $|E| = |F|$  et si  $f$  est injective, alors  $f$  est bijective.
- ★ Si  $|E| = |F|$  et si  $f$  est surjective, alors  $f$  est bijective.

**Démonstration (idée)** ★ Comme  $f$  est injective,  $f(E)$  est un sous-ensemble de  $F$  admettant le même nombre d'éléments que  $E$ . De plus,  $|f(E)| \leq |F|$ , d'où l'inégalité annoncée.

- ★ Si  $f$  est surjective, alors  $f(E) = F$ . Or le nombre d'éléments de  $E$  est supérieur ou égal à celui de  $f(E)$ , d'où l'inégalité annoncée.
- ★ Si  $f$  n'est pas surjective, alors  $f(E) \neq F$ . Posons  $\tilde{F} = f(E)$ . Alors (par injectivité de  $f$ ) :

$$|E| = |f(E)| = |\tilde{F}| < |F|,$$

ce qui contredit l'hypothèse. Donc  $f$  est surjective.

- ★ Supposons que  $f$  ne soit pas injective. Il existe alors  $x, x' \in E$  tel que  $f(x) = f(x')$ . Posons  $E_x = E \setminus \{x\}$  et notons  $f_x$  la restriction de  $f$  à  $E_x$ . Alors  $f_x$  est surjective de  $E_x$  sur  $F$  donc  $|E_x| \geq |F|$ , ce qui est absurde car  $|E| = |F|$  et  $|E_x| < |E|$ . ■

**Corollaire** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis de même cardinal et  $f : E \rightarrow F$  une application. Alors

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective} \iff f \text{ est bijective}$$

**Démonstration** C'est une conséquence immédiate des deux derniers points du résultat précédent. ■

#### 4) Cardinal d'une réunion d'ensembles, du complémentaire d'un ensemble

##### (a) Cardinal d'une réunion disjointe

**Proposition (cardinal d'une réunion disjointe)** Soient  $E$  un ensemble fini et  $F, G$  des sous-ensembles *disjoints* (i.e. tels que  $F \cap G = \emptyset$ ). Alors  $F \cup G$  est un ensemble fini et :

$$|F \cup G| = |F| + |G|$$

**Démonstration** admise ■

**Notation :** si  $E$  et  $F$  sont deux ensembles disjoints, la réunion  $E \cup F$  se note aussi  $E \sqcup F$ .

**Corollaire (cardinal du complémentaire)** Soient  $E$  un ensemble fini et  $F, G$  des sous-ensembles de  $E$ . Alors :

★  $\overline{F}$  est un ensemble fini et :

$$|\overline{F}| = |E| - |F|$$

★  $F \setminus G$  est un ensemble fini et :

$$|F \setminus G| = |F| - |F \cap G|$$

**Démonstration** ★ Comme  $\overline{F}$  est un sous-ensemble de  $E$ , il est fini. De plus,  $F$  et  $\overline{F}$  sont disjoints donc la proposition précédente nous donne :

$$|E| = |F \cup \overline{F}| = |F| + |\overline{F}|,$$

ce qu'il fallait démontrer.

★ De même,  $F \setminus G$  et  $F \cap G$  sont des ensembles finis. La formule provient de l'égalité  $F \setminus G = F \setminus (F \cap G)$ . ■

**Exemple** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Le nombre de couples  $(x, y) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tels que  $x \neq y$  est égal à  $n^2 - n$ .

**Démonstration** Posons  $F = \{(x, y) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid x \neq y\}$ . Comme  $F$  est un sous-ensemble de  $\llbracket 1, n \rrbracket^2$  (qui est fini),  $F$  est un ensemble fini. De plus :

$$\overline{F} = \{(k, k) \mid k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$$

est de cardinal  $n$  donc :

$$|F| = |\llbracket 1, n \rrbracket^2| - |\overline{F}| = n^2 - n,$$

d'où le résultat. ■

On peut généraliser la proposition précédente à une famille d'ensembles deux à deux disjoints.

**Corollaire (cardinal d'une réunion disjointe)** Soient  $E$  un ensemble fini,  $p$  un entier naturel supérieur ou égal à 2 et  $A_1, \dots, A_p$  des sous-ensembles de  $E$  deux à deux disjoints, *i.e.* tels que :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$$

Alors l'ensemble  $\bigcup_{i=1}^p A_i$  est fini et :

$$\left| \bigcup_{i=1}^p A_i \right| = \sum_{i=1}^p |A_i|$$

**Démonstration** On démontre cette propriété par récurrence sur le nombre  $p$  d'ensembles. Pour tout entier  $p$  supérieur ou égal à 2, on note  $\mathcal{P}(p)$  la propriété : « pour toute famille  $(A_1, \dots, A_p)$  de sous-ensembles de  $E$  deux à deux disjoints, l'ensemble  $\bigcup_{i=1}^p A_i$  est fini et  $\left| \bigcup_{i=1}^p A_i \right| = \sum_{i=1}^p |A_i|$  ».

- ★ Si  $p = 2$ , alors la propriété est vraie d'après la proposition précédente.
- ★ On suppose que la propriété est vraie pour l'entier  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Démontrons qu'elle reste vraie pour l'entier  $p + 1$ . On considère  $p + 1$  sous-ensembles  $A_1, \dots, A_p, A_{p+1}$  de  $E$ , deux à deux disjoints. Par hypothèse de récurrence, on sait que l'ensemble  $A = \bigcup_{i=1}^p A_i$  est fini et  $A \cap A_{p+1} = \emptyset$ . On sait d'après la proposition précédente que l'ensemble  $A \cup A_{p+1}$  est fini et que  $|A \cup A_{p+1}| = |A| + |A_{p+1}|$ . Or  $A$  est la réunion disjointe de  $p$  ensembles finis deux à deux disjoints donc, par hypothèse de récurrence, on a :

$$|A| = \sum_{i=1}^p |A_i| \quad \text{puis} \quad \left| \bigcup_{i=1}^{p+1} A_i \right| = \sum_{i=1}^{p+1} |A_i|$$

Le corollaire est donc démontré, par principe de récurrence simple. ■

### (b) Cardinal d'une réunion de deux ensembles

On peut aussi calculer  $|A \cup B|$  si  $A$  et  $B$  ne sont pas disjoints.

**Proposition (cardinal d'une réunion, cas général)** Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles d'un ensemble fini  $E$ . Alors  $A \cup B$  est un ensemble fini et :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

**Démonstration** Les ensembles  $A, B, A \cap B$  et  $A \cup B$  sont finis en tant que sous-ensembles de  $E$ . On a de plus l'égalité :

$$A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (B \setminus A) \sqcup (A \cap B)$$

donc, d'après le corollaire précédent :

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A \setminus B| + |B \setminus A| + |A \cap B| \\ &= (|A| - |A \cap B|) + (|B| - |A \cap B|) + |A \cap B| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B|, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

**Exemple** Dans une classe, tous les élèves suivent des cours d'anglais ou d'espagnol. Plus précisément, 25 font de l'anglais, 12 font de l'espagnol, et 8 font à la fois de l'anglais et de l'espagnol. Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe ?

### 5) Cardinal d'un produit cartésien

**Proposition (cardinal d'un produit cartésien)** Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles finis. Alors l'ensemble  $A \times B$  est fini et :

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

**Démonstration** Notons  $n \in \mathbb{N}^*$  le cardinal de l'ensemble  $A$  et posons  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ . Alors :

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\} = \{(a_i, b) \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } b \in B\} = \bigcup_{i=1}^n (\{a_i\} \times B)$$

Or les ensembles  $\{a_i\} \times B$  ( $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ) sont deux à deux disjoints donc :

$$|A \times B| = \left| \bigcup_{i=1}^n (\{a_i\} \times B) \right| = \sum_{i=1}^n |\{a_i\} \times B| = \sum_{i=1}^n |B| = n |B|,$$

ce qui démontre le résultat puisque  $n = |A|$ . ■

**Corollaire (cardinal d'un produit cartésien)** Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ .

★ Soient  $A_1, \dots, A_n$  des ensembles finis. Alors l'ensemble  $A_1 \times \dots \times A_n$  est fini et :

$$|A_1 \times \dots \times A_n| = \prod_{i=1}^n |A_i|$$

★ Soit  $A$  un ensemble fini. Alors l'ensemble  $A^n$  est fini et :

$$|A^n| = |A|^n$$

Un élément de  $A^n$  est appelé une *n-liste* de  $A$ .

**Démonstration** Il suffit de procéder par récurrence sur le nombre d'ensembles du produit cartésien. ■

**Exemple** ★ Pour tous  $n, p \in \mathbb{N}^*$ , on a  $|\llbracket 1, n \rrbracket|^p = n^p$ .

- ★ Combien de mots peut-on former à partir des lettres  $a, b$  et  $c$  ?
- ★ Un restaurant propose pour son menu du jour 2 entrées, 4 plats et 3 desserts. Combien de menus différents sont possibles ?

### 6) Nombre d'applications entre deux ensembles finis

**Proposition (cardinal de  $F^E$ )** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis. Alors l'ensemble  $F^E$  est fini et :

$$|F^E| = |F|^{|E|}$$

**Démonstration** Notons  $m \in \mathbb{N}^*$  le cardinal de l'ensemble  $E$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  celui de  $F$  et posons  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ . Pour construire une application de  $E$  vers  $F$ , il faut associer à chaque élément de  $E$  un élément de  $F$ . Pour chaque élément de  $E$ , il y a donc  $n$  choix. Le nombre d'applications que l'on peut construire est donc :

$$\underbrace{n}_{\text{nombre de choix pour } f(e_1)} \times \underbrace{n}_{\text{nombre de choix pour } f(e_2)} \times \dots \times \underbrace{n}_{\text{nombre de choix pour } f(e_m)} = n^m,$$

d'où le résultat. ■

## II – Arrangements et combinaisons

On considère deux ensembles finis  $E$  et  $F$ .

### 1) Arrangement et nombre d'injections

Posons  $n = |E|$  et soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On rappelle qu'une  $p$ -liste d'éléments de  $E$  est un élément de  $E^p$  (i.e. de la forme  $(e_1, \dots, e_p)$  où  $e_1, \dots, e_p \in E$ ).

**Définition (arrangement)** On appelle  $p$ -arrangement de  $E$  toute  $p$ -liste de  $E$  d'éléments deux à deux distincts. Ainsi, une  $p$ -liste  $(e_1, \dots, e_p)$  de  $E$  est un  $p$ -arrangement de  $E$  si et seulement si :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad i \neq j \implies e_i \neq e_j$$

**Exemple** Si  $E = \{1, 2, 3\}$ , alors les 2-arrangements de  $E$  sont  $(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (2, 3)$  et  $(3, 2)$ .

#### Remarques

- ★ Dans un arrangement, aucun élément n'apparaît deux fois et l'ordre des éléments est important.
- ★ Il faut penser aux arrangements lorsqu'on choisit des éléments avec ordre et sans remise (par exemple pour un tirage successif sans remise).
- ★ Un arrangement est aussi appelé une  $p$ -liste sans répétition de  $E$ .

**Proposition (nombre d'arrangements)** Le nombre de  $p$ -arrangements de  $E$ , noté  $A_n^p$ , est :

$$A_n^p = \begin{cases} 0 & \text{si } p > n \\ \frac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{cases}$$

**Démonstration** Tout d'abord, si  $n > p$ , alors il n'est clair qu'il n'existe pas de  $p$ -arrangement de  $E$ . Supposons que  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et posons  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ . Pour construire un  $p$ -arrangement  $(x_1, \dots, x_p)$  de  $E$ , on a :

- $n$  choix pour  $x_1$  (tout élément de  $E$  convient) ;
- $n - 1$  choix pour  $x_2$  parmi les éléments de  $E \setminus \{x_1\}$  ;
- $n - 2$  choix pour  $x_3$  parmi les éléments de  $E \setminus \{x_1, x_2\}$  ;
- ... ;
- il reste  $n - p + 1$  choix pour  $x_p$ .

Le nombre de  $p$ -arrangements de  $E$  est donc  $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - p + 1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ . ■

**Théorème (nombre d'injections)** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis tels que  $|E| = p$  et  $|F| = n$  avec  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Le nombre d'injections de  $E$  vers  $F$  est égal à  $A_n^p$ .

**Démonstration** Si  $f \in F^E$  est injective, alors  $|E| \leq |F|$ , i.e.  $p \leq n$ . Il n'existe donc pas d'injection de  $E$  dans  $F$  si  $p > n$ . Supposons maintenant que  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et posons  $E = \{e_1, \dots, e_p\}$ . Pour construire une injection  $f$  de  $E$  dans  $F$  :

- on a  $n$  choix pour  $f(e_1)$  (tous les éléments de  $F$  conviennent) ;
- il reste  $n - 1$  choix possibles pour  $f(e_2)$  parmi les éléments de  $F \setminus \{f(e_1)\}$  ;
- il reste  $n - 2$  choix possibles pour  $f(e_3)$  parmi les éléments de  $F \setminus \{f(e_1), f(e_2)\}$  ;
- ... ;
- pour le dernier élément  $e_p$ , il reste  $n - (p - 1)$  choix pour  $f(x_p)$  (tout élément différent des éléments  $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_{p-1})$  convient).

Le nombre d'injections de  $E$  dans  $F$  est donc  $n \times (n - 1) \times \dots \times (n - p + 1) = A_n^p$ . ■

**Exemple** Dans une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10, on tire successivement et sans remise 3 boules. Combien y a-t-il de tirages possibles ?

**Solution.** Le nombre de tirages possibles est le nombre de 3-arrangements de l'ensemble  $\llbracket 1, 10 \rrbracket$ . Il y en a  $A_{10}^3 = \frac{10!}{(10 - 3)!} = 720$ .

**Exemple** Quel est le nombre de paris possibles au tiercé pour une course de 15 chevaux ?

## 2) Permutations et nombre de bijections

**Définition (permutation)** Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$ . On appelle permutation de  $E$  tout  $n$ -arrangement de  $E$ .

**Remarque :** dans une permutation de  $E$  apparaît une et une seule fois tous les éléments de  $E$ .

**Exemple** Une permutation de l'ensemble  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  est la 5-liste  $(2, 4, 1, 3, 5)$ .

**Proposition (nombre de permutations)** Soit  $E$  est un ensemble fini de cardinal  $n$ . Le nombre de permutations de  $E$  est égal à  $n!$ .

**Démonstration** Les permutations de  $E$  étant les  $n$ -arrangement de  $E$ , le nombre de permutations de  $E$  est  $A_n^n = \frac{n!}{(n - n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$ . ■


On a également le résultat suivant.

**Proposition** Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$ . Il y a  $n!$  bijections de  $E$  sur  $E$ .

**Démonstration** Soit  $f \in E^E$ . Comme  $E$  est fini, on sait que  $f$  est injective si et seulement si  $f$  est bijective donc :

$$\{f \in E^E \mid f \text{ injective}\} = \{f \in E^E \mid f \text{ bijective}\}$$

D'après ce qui précède, le nombre de bijections de  $E$  sur  $E$  est  $n!$ . ■

-  **Exercice**
1. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot « MATHS ».
  2. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot « PRÉPA ».
  3. Déterminer le nombre d'anagrammes du mot « ANANAS ».

**Solution.**

1. Le mot « MATHS » est constitué des cinq lettres *distinctes* M, A, T, H et S. Le nombre de mots que l'on peut créer avec ces lettres correspond au nombre de permutations des cinq lettres. Il y a donc  $5! = 120$  anagrammes.
2. Si les cinq lettres du mot « PRÉPA » étaient distinctes, alors on aurait  $5! = 120$  anagrammes. Mais la lettre P apparaît deux fois dans ce mot. On a donc compté plusieurs fois les mêmes anagrammes. On les a comptés autant de fois qu'il y a de permutations possibles de ces deux P, c'est-à-dire  $2!$ . Le nombre d'anagrammes est donc  $\frac{120}{2!} = 60$ .
3. Si les six lettres du mot « ANANAS » étaient distinctes, alors on aurait  $6! = 720$  anagrammes. Or la lettre A apparaît trois fois, donc on a compté plusieurs fois les mêmes anagrammes, autant de fois qu'il y a de permutations possibles entre ces trois lettres A, c'est-à-dire  $3!$  permutations. Pour la lettre N, il y a  $2!$  permutations de ces deux lettres. Au final, le nombre d'anagrammes du mot « ANANAS » est donc  $\frac{6!}{3!2!} = 12$ .

### 3) Combinaisons et nombre de sous-ensembles

Commençons par définir l'ensemble des parties d'un ensemble.

**Définition (ensemble  $\mathcal{P}(E)$ )** Soit  $E$  un ensemble. On appelle *ensemble des parties de l'ensemble  $E$* , noté  $\mathcal{P}(E)$ , l'ensemble des sous-ensembles de  $E$ , *i.e.* :

$$\mathcal{P}(E) = \{X \mid X \subset E\}$$

Les éléments de  $\mathcal{P}(E)$  sont donc des ensembles (ce sont les sous-ensembles de  $E$ ).

 **Exercice** ★ L'ensemble des parties de l'ensemble  $E = \{0, 1\}$  est :

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, E\}$$

★ L'ensemble des parties de l'ensemble  $E = \{a, b, c\}$  est :

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$$

**Définition ( $p$ -combinaison de  $E$ )** Soit  $E$  un ensemble fini et  $p \in \llbracket 0, |E| \rrbracket$ .

- ★ Une  $p$ -combinaison de  $E$  est une partie de  $E$  de cardinal  $p$ .
- ★ On note  $\mathcal{P}_p(E)$  l'ensemble des  $p$ -combinaisons de  $E$ . On a donc :

$$\mathcal{P}_p(E) = \{A \in \mathcal{P}(E) \mid |A| = p\}$$

**Exemple** ★  $\{1, 2, 3, 4\}$  et  $\{2, 3, 1, 7\}$  sont des 4-combinaisons de  $\llbracket 1, 9 \rrbracket$ .

- ★ Les 2-combinaisons d'éléments de l'ensemble  $\{\text{Sophie, Jean, Thibaut}\}$  sont les sous-ensembles  $\{\text{Sophie, Jean}\}$ ,  $\{\text{Sophie, Thibaut}\}$  et  $\{\text{Jean, Thibaut}\}$ .

**Remarque :** dans une  $p$ -combinaison, il n'y a pas d'ordre et pas de répétition.

**Proposition (nombre de combinaisons)** Soient  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$  et  $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Le nombre de  $p$ -combinaisons de  $E$  est :


$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Autrement dit :

$$|\mathcal{P}_p(E)| = \binom{n}{p}$$

**Démonstration** On sait que le nombre de  $p$ -listes sans répétition d'éléments de  $E$  que l'on peut former est  $\frac{n!}{(n-p)!}$ . Considérons une  $p$ -combinaison de  $E$ , notée  $A = \{e_1, \dots, e_p\}$ . Pour ce sous-ensemble de  $E$ , l'ordre n'a pas d'importance et le nombre de  $p$ -arrangements de  $A$  que l'on peut former est  $p!$ . Il y a donc  $p!$  fois plus de  $p$ -arrangements que de  $p$ -combinaisons donc le nombre de  $p$ -combinaisons de  $E$  est  $\frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$ . ■

**Remarque.** Il faudra penser à utiliser les combinaisons dans des problèmes de tirages *simultanés*.

-  **Exercice**
1. On tire simultanément 4 cartes dans un jeu de 32 cartes. Combien y a-t-il de mains possibles ?
  2. Dans une classe de 25 élèves, on veut constituer aléatoirement un groupe de 5 personnes. Combien de groupes peut-on former ?

**Solution.**

1. On tire 4 cartes simultanément. Le nombre de mains possibles est le nombre de 4-combinaisons de l'ensemble des 32 cartes. On sait qu'il y en a  $\binom{32}{4}$ .
2. On choisit simultanément 5 élèves parmi les 25 de la classe (dans un groupe, l'ordre n'est pas important). On cherche donc le nombre de 5-combinaisons de l'ensemble des 25 élèves. On sait qu'il y en a  $\binom{25}{5} = 53130$ .

#### 4) Nombre de parties d'un ensemble fini

**Proposition (cardinal de  $\mathcal{P}(E)$ )** Soit  $E$  un ensemble fini. L'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  des parties de  $E$  est fini et :

$$|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$$

**Démonstration** Notons  $n \in \mathbb{N}$  le cardinal de  $E$ . Un sous-ensemble  $A$  de  $E$  peut contenir 0 éléments au minimum (alors  $A = \emptyset$ ) et jusqu'à  $n$  éléments au maximum (alors  $A = E$ ) et toutes les valeurs entières entre 0 et  $n$  sont possibles. Ceci montre que :

$$\mathcal{P}(E) = \bigcup_{p=0}^n \mathcal{P}_p(E)$$

De plus, les ensembles  $\mathcal{P}_p(E)$  ( $0 \leq p \leq n$ ) sont deux à deux disjoints et sont des ensembles finis. Par conséquent,  $\mathcal{P}(E)$  est un ensemble fini et :

$$|\mathcal{P}(E)| = \sum_{p=0}^n |\mathcal{P}_p(E)| = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = (1+1)^n = 2^n$$

d'après la formule du binôme de Newton. ■

### 5) Formules du triangle de Pascal et du binôme de Newton : preuves par dénombrement

On souhaite donner des démonstrations combinatoires de ces formules.

**Proposition**      ★ **Formule du triangle de Pascal** : pour tous  $n, k \in \mathbb{N}$  tels que  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ , on a

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

★ **Formule du binôme de Newton** : pour tous  $a, b \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

**Démonstration**      ★ Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Considérons un ensemble de cardinal  $n+1$  et soit  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Fixons un élément  $e$  de  $E$ . Dénombrons l'ensemble  $\mathcal{P}_{k+1}(E)$  des  $(k+1)$ -combinaisons de  $E$ . On note :

- $Q$  l'ensemble des parties de  $E$  constituées de  $k+1$  éléments de  $E \setminus \{e\}$  (i.e  $Q = \mathcal{P}_{k+1}(E \setminus \{e\})$ );
- $R$  l'ensemble des parties de  $E$  constituées de  $e$  et de  $k$  éléments de  $E \setminus \{e\}$ .

Alors on a l'égalité  $P = Q \sqcup R$ . Ainsi :

$$|\mathcal{P}_{k+1}(E)| = |Q| + |R| = |\mathcal{P}_{k+1}(E \setminus \{e\})| + |\mathcal{P}_k(E \setminus \{e\})|,$$

d'où la formule annoncée.

★ Le développement du produit

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \times (a+b) \times \cdots \times (a+b)}_{n \text{ fois}}$$

nous donne :

$$\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ fois}} = 2^n \text{ fois}$$

tous de la forme  $a^k b^{n-k}$  où  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Si  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  est fixé, alors le nombre de termes égaux à  $a^k b^{n-k}$  est le nombre de façons de choisir  $k$  nombres complexes  $a$  parmi les  $n$  facteurs du produit relatif à  $(a+b)^n$ ; il y en a exactement  $\binom{n}{k}$ . D'où la formule du binôme de Newton. ■

# RÉSUMÉ

Dans les problèmes de dénombrement les plus simples, on utilisera :

- ★ les produits cartésiens (et les listes) pour un tirage **successif** (l'ordre est donc important) **avec remise** ;
- ★ les arrangements (et permutations) d'un ensemble pour un tirage **successif** (l'ordre est donc important) **sans remise** ;
- ★ les combinaisons d'un ensemble pour un tirage **simultané** (l'ordre n'est pas important).

- Exemple**
1. Un mot de passe de carte bancaire est composé de 4 chiffres. Il existe 10000 codes différents.
  2. Le nombre de façons de ranger les 7 tomes de Harry Potter sur une étagère est  $7! = 5040$ .
  3. Le nombre de groupes de 3 élèves (*i.e.* le nombre de groupes de colles) que l'on peut former dans une classe de 30 élèves est  $\binom{30}{3} = 4060$ .

La plupart des dénombrements nécessitent tout de même plus de travail. On peut être amené à dénombrer un ensemble :

- ★ en construisant directement un élément de l'ensemble en raisonnant *par choix successifs* (c'est ainsi que l'on a dénombré  $F^E$  ainsi que la nombre d'injections de  $E$  vers  $F$ ) ;
- ★ en écrivant l'ensemble à dénombrer comme une réunion disjointe de sous-ensembles plus simples à dénombrer (c'est de cette façon qu'on a pu dénombrer l'ensemble  $\mathcal{P}(E)$ ).

- Exemple**
1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Le nombre d'applications surjectives de  $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$  sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$  est égal à  $\frac{n \times (n+1)!}{2}$ .
  2. Une urne est constituée de 4 jetons verts et de 4 jetons rouges, les deux lots de jetons étant numérotés de 1 à 4. On prélève simultanément 3 jetons de l'urne. Le nombre de tirages constitués exactement de 2 jetons verts et d'un jeton numéroté 1 est égal à 12.