

GROUPE SYMÉTRIQUE ET DÉTERMINANTS

Table des matières

1	Groupe symétrique et permutations d'un ensemble fini	1
1.1	Rappels et compléments	1
1.2	Cycle et décomposition d'une permutation	3
1.3	Signature d'une permutation	5
2	Forme multilinéaire alternée	6
2.1	Motivation géométrique	6
2.2	Forme multilinéaire symétrique, antisymétrique, alternée	7
2.3	Premières propriétés	9
3	Déterminant	10
3.1	Déterminant d'une famille de vecteurs	10
3.2	Déterminant d'une matrice carrée	13
3.3	Déterminant d'un endomorphisme	15
4	Calculs pratiques	16
4.1	Déterminant d'une matrice triangulaire	16
4.2	Effet des opérations élémentaires sur le déterminant	17
4.3	Développement suivant une ligne ou une colonne	18
4.4	Déterminant de Vandermonde	21
4.5	Inversion de matrices	22

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne l'un des deux corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

I – Groupe symétrique et permutations d'un ensemble fini

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

On sait que, si X est un ensemble non vide, alors l'ensemble S_X des applications bijectives de X sur lui-même, muni de la composition des applications, est un groupe. L'élément neutre est Id_X et l'inverse d'un élément dans ce groupe correspond à l'application réciproque.

Si X désigne l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$ des entiers de 1 à n , ce groupe est noté S_n (au lieu de $S_{\llbracket 1, n \rrbracket}$). On dit que S_n est *le groupe symétrique* (d'indice n).

1) Rappels et compléments

Définition (permutation) Un élément σ de S_n est appelé une *permutation* de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Exemple Une permutation de $\llbracket 1, 3 \rrbracket$ est :

$$\sigma : \begin{cases} \llbracket 1, 3 \rrbracket & \longrightarrow & \llbracket 1, 3 \rrbracket \\ 1 & \longmapsto & 2 \\ 2 & \longmapsto & 1 \\ 3 & \longmapsto & 3 \end{cases}$$

Notation. Une permutation est usuellement représentée à l'aide d'un tableau. Ainsi, un élément σ de S_n sera décrit comme suit :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in S_n$$

Avec cette notation, l'application identité est $\text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$.

Exemple La permutation σ de l'exemple précédent se réécrit :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Proposition Le groupe S_n est de cardinal $n!$.

Démonstration Pour dénombrer S_n , nous allons construire un élément quelconque de S_n . Soit $\sigma \in S_n$.

- ★ On dispose de n choix pour $\sigma(1)$: tous les éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sont possibles.
- ★ Pour $\sigma(2)$, il reste $n - 1$ choix : tous les éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{\sigma(1)\}$ sont possibles (on ne peut pas avoir $\sigma(2) = \sigma(1)$ car, dans ce cas, σ ne serait pas injective).
- ★ On a ensuite $n - 2$ choix pour $\sigma(3)$: tout élément de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{\sigma(1), \sigma(2)\}$ convient.
- ★ *etc.*
- ★ Il ne reste qu'un choix possible pour $\sigma(n)$ (une fois éliminées les valeurs de $\sigma(1), \dots, \sigma(n - 1)$).

On a donc :

$$\text{Card}(S_n) = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1 = n!,$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

Exemple ★ Le groupe S_2 est composé des permutations :

$$\text{Id}_{\llbracket 1, 2 \rrbracket} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

★ Le groupe S_3 est composée des $3! = 6$ permutations :

$$\text{Id}_{\llbracket 1, 3 \rrbracket} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Notation. Pour alléger les notations, la composition $\sigma \circ \tau$ de deux éléments σ et τ de S_n est parfois notée plus simplement « $\sigma\tau$ ». On parlera du *produit* de σ par τ .

Exemple Dans S_3 , si $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, alors :

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ATTENTION : une composition se lit de la droite vers la gauche.

2) Cycle et décomposition d'une permutation

La notion d'orbite va nous permettre de décomposer une permutation en « produit » de permutations plus simples.

Définition (orbite) Soient $\sigma \in S_n$ et $a \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On appelle *orbite de a sous l'action de σ* le sous-ensemble de $\llbracket 1, n \rrbracket$ suivant :

$$\text{Orb}_\sigma(a) = \{\sigma^k(a) \mid k \in \mathbb{N}\}$$

où σ^k désigne la composée $\sigma^k = \sigma \circ \dots \circ \sigma$ (k fois) si $k \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma^0 = \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$.

Ainsi, $\text{Orb}_\sigma(a)$ est l'ensemble des points *atteignables* à partir de a par l'action de la permutation σ .

Exemple Si on considère la permutation :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in S_6$$

alors :

- ★ $\text{Orb}_\sigma(1) = \{1, 2, 3\} = \text{Orb}_\sigma(2) = \text{Orb}_\sigma(3)$;
- ★ $\text{Orb}_\sigma(4) = \text{Orb}_\sigma(5) = \{4, 5\}$;
- ★ $\text{Orb}_\sigma(6) = \{6\}$.

Pour $\sigma \in S_n$ fixé, la relation binaire \mathcal{R}_n sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ défini par :

$$\forall (a, b) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad a \mathcal{R}_n b \iff (\exists c \in \llbracket 1, n \rrbracket, a, b \in \text{Orb}_\sigma(c))$$

est une relation d'équivalence sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ dont les classes d'équivalence sont les orbites de la permutation σ . On en déduit donc que les orbites (distinctes) d'une permutation $\sigma \in S_n$ forment une partition de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Définition (cycle) On appelle *cycle* toute permutation admettant une unique orbite contenant au moins deux éléments.

- ★ Cette unique orbite est alors appelée le *support* du cycle. On le note $\text{supp}(\sigma)$.
- ★ Le cardinal de cette orbite est appelé la *longueur* du cycle.

Exemple ★ Dans S_3 , $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est un cycle de longueur 3 (l'unique orbite est en effet $\{1, 2, 3\}$). On a donc $\text{supp}(\sigma) = \{1, 2, 3\}$.

- ★ Dans S_4 , $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas cycle. Cette permutation admet effectivement deux orbites distinctes de longueurs 2, à savoir $\{1, 2\}$ et $\{3, 4\}$.

Proposition Soient $\sigma \in S_n$ un cycle et $a \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \text{supp}(\sigma)$. Alors $\sigma(a) = a$.

Démonstration Par l'absurde, supposons que $\sigma(a) \neq a$. Alors $\text{Orb}_\sigma(a) = \{\sigma^k(a) \mid k \in \mathbb{N}\}$ est une orbite de σ de longueur supérieur ou égale à 2 (puisque a et $\sigma(a)$ sont des éléments distincts de cette orbite). Or σ est un cycle donc $\text{supp}(\sigma) = \text{Orb}_\sigma(a)$. On en déduit que $a \in \text{supp}(\sigma)$, ce qui est absurde. ■

Notation. Soient $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$ et a_1, \dots, a_p des éléments deux à deux distincts de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On note :

$$\sigma = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p)$$

le cycle de S_n défini par :

- ★ $\forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, \sigma(a_k) = a_{k+1}$;
- ★ $\sigma(a_p) = a_1$;
- ★ $\forall b \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{a_1, \dots, a_p\}, \sigma(b) = b$.

Exemple ★ Dans S_3 , le cycle $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ se réécrit :

$$\sigma = (1 \ 3 \ 2)$$

★ Dans S_4 , le cycle $\tau = (2 \ 1 \ 3)$ désigne la permutation :

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Proposition (cycles et commutativité) Deux cycles de S_n dont les supports sont disjoints commutent, *i.e.* :

$$\forall \sigma, \tau \in S_n, (\sigma, \tau \text{ cycles et } \text{supp}(\sigma) \cap \text{supp}(\tau) = \emptyset) \implies \sigma\tau = \tau\sigma$$

Démonstration Soient $\sigma, \tau \in S_n$ deux cycles. On suppose que $\text{supp}(\sigma) \cap \text{supp}(\tau) = \emptyset$. Soit $a \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrons que $(\sigma \circ \tau)(a) = (\tau \circ \sigma)(a)$ en distinguant trois cas.

★ **Premier cas :** $a \in \text{supp}(\sigma)$

Alors $\sigma(a) \in \text{supp}(\sigma)$ et $\sigma(a) \notin \text{supp}(\tau)$ (car $\text{supp}(\sigma) \cap \text{supp}(\tau) = \emptyset$). Donc :

$$(\tau\sigma)(a) = \tau(\sigma(a)) = \sigma(a)$$

De même, $\tau(a) \notin \text{supp}(\sigma)$ donc :

$$(\sigma\tau)(a) = \sigma(\tau(a)) = \sigma(a) = (\tau\sigma)(a)$$

★ **Deuxième cas :** de la même manière, si a appartient au support de τ , alors on a $(\sigma\tau)(a) = (\tau\sigma)(a)$.

★ **Troisième cas :** si $a \notin \text{supp}(\sigma) \cup \text{supp}(\tau)$, alors on a encore l'égalité souhaitée (car $\sigma(a) = \tau(a) = a$).

Finalement, $\sigma\tau = \tau\sigma$. ■

Théorème (décomposition d'une permutation en produit de cycles) Toute permutation $\sigma \in S_n$ différente de l'identité peut s'écrire de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme produit de cycle à supports disjoints.

Démonstration Ce résultat est admis. ■

Exemple ★ Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in S_6$. Alors :

$$\sigma = (1 \ 3 \ 2)(4 \ 5)$$

★ Soit $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in S_5$. Alors :

$$\tau = (1 \ 2)(3 \ 5)$$

3) Signature d'une permutation

Définition (transposition) On appelle *transposition* tout cycle de S_n de longueur 2.

Ainsi, un cycle de S_n est une permutation de la forme $(i \ j) \in S_n$ où $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ sont tels que $i < j$.

Remarque : si τ est une transposition, alors $\tau^{-1} = \tau$.

Démonstration Soit $\tau \in S_n$ une transposition. Il existe alors $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i < j$ et $\tau = (i \ j)$. On a :

- ★ $\tau^2(i) = \tau(\tau(i)) = \tau(j) = i$ et, de même, $\tau^2(j) = j$;
- ★ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}$, on a $\tau(k) = k$ donc $\tau^2(k) = k$.

Ainsi, $\tau^2 = \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$ et donc $\tau^{-1} = \tau$. ■

Théorème (décomposition d'une permutation comme produit de transpositions)
 Tout permutation de S_n différente de l'identité peut s'écrire comme produit de transpositions.

Démonstration Comme toute permutation différente de l'identité peut se décomposer comme un produit de cycles, il suffit d'établir que tout cycle peut s'écrire comme un produit de transpositions. On considère donc un cycle σ de S_n . Il existe $p \in \llbracket 2, n \rrbracket$ et des entiers deux à deux distincts a_1, \dots, a_p de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tels que :

$$\sigma = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_p)$$

On remarque qu'on a l'égalité :

$$\sigma = (a_1 \ a_2) (a_2 \ a_3) \dots (a_{p-1} \ a_p) \tag{*}$$

Donc σ se décompose comme un produit de transpositions. ■

Remarques :

- ★ Contrairement à la décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints, il n'y a pas unicité quand on décompose en produit de transpositions. Dans S_3 par exemple :

$$(1 \ 2 \ 3) = (1 \ 2) (2 \ 3) = (2 \ 3) (3 \ 1)$$

- ★ Pour obtenir une telle décomposition, on commencera par décomposer la permutation en produit de cycles puis on décomposera chaque cycle à l'aide de la formule (*).

Exemple Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in S_8$. Alors :

$$\begin{aligned} \sigma &= (1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5) (6 \ 8 \ 7) \\ &= (1 \ 2) (2 \ 3) (3 \ 4) (4 \ 5) (6 \ 8) (8 \ 7) \end{aligned}$$

Théorème (signature) Il existe une unique application $\varepsilon \in \{-1, 1\}^{S_n}$ telle que :

- ★ pour toute transposition $\tau \in S_n$, on a $\varepsilon(\tau) = -1$;
- ★ ε est un morphisme de groupes de (S_n, \circ) vers $(\{-1, 1\}, \times)$.

L'application ε est appelée *signature* sur S_n .

Démonstration Ce résultat est admis. ■

Remarques :

- ★ Comme φ est un morphisme de groupes, on a $\varepsilon(\text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}) = 1$.
- ★ Pour calculer la signature d'une permutation $\sigma \in S_n \setminus \{\text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}\}$, il suffit de décomposer σ en produit de transpositions et d'utiliser les propriétés de la signature.

Exemple Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \in S_5$. Alors $\sigma = (1 \ 2)(3 \ 5)$ donc :

$$\varepsilon(\sigma) = \varepsilon((1 \ 2)(3 \ 5)) = \varepsilon((1 \ 2)) \varepsilon((3 \ 5)) = (-1)^2 = 1$$

II – Forme multilinéaire alternée

1) Motivation géométrique

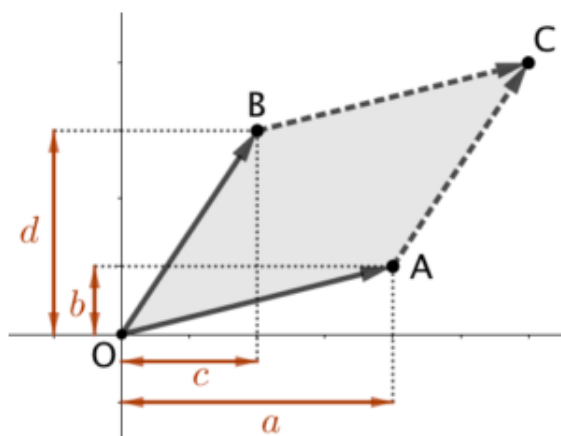
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$. On veut calculer l'aire géométrique $\mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v})$ du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = (a, b)$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB} = (c, d)$.

Proposition On a $\mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v}) = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Démonstration On a :

$$\mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v}) = (a + c)(b + d) - 2 \times \frac{1}{2} \times ab - 2 \times \frac{1}{2} \times bd - 2bc = ad - bc,$$

ce qu'il fallait démontrer. ■



Notation. Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, on notant $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$, on pose :

$$\mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v}) = ad - bc$$

Ce nombre est l'aire *algébrique* du parallélogramme engendré par les vecteurs \vec{u} et \vec{v} . Plus précisément, si on note $\theta \in]-\pi, \pi]$ la mesure principale de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) , alors :

- ★ l'aire $\mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v})$ est strictement positive si $\theta \in]0, \pi[$ (dans ce cas, on dit que la famille de vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) est une base du plan orientée dans le sens direct) ;
- ★ l'aire $\mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v})$ est strictement négative si $\theta \in]-\pi, 0[$ (dans ce cas, on dit que la famille de vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) est une base du plan orientée dans le sens indirect).

En outre, on dispose des propriétés suivantes.

- ★ Pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$, on a $\mathcal{A}(\vec{u}, \lambda\vec{u}) = 0$. On dit que \mathcal{A} est alternée.

Démonstration Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{u} = (a, b)$ et alors $\mathcal{A}(\vec{u}, \vec{u}) = ab - ab = 0$. ■

- ★ Pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, on a $\mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v}) = -\mathcal{A}(\vec{v}, \vec{u})$. On dit que \mathcal{A} est antisymétrique.

Démonstration Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$. Alors :

$$\mathcal{A}(\vec{v}, \vec{u}) = bc - ad = -(ad - bc) = -\mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v}),$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

- ★ Pour tous $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathcal{A}(\vec{u} + \lambda\vec{v}, \vec{w}) = \mathcal{A}(\vec{u}, \vec{w}) + \lambda\mathcal{A}(\vec{v}, \vec{w}) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v} + \lambda\vec{w}) = \mathcal{A}(\vec{u}, \vec{v}) + \lambda\mathcal{A}(\vec{u}, \vec{w})$$

On dit que \mathcal{A} est une forme bilinéaire.

Démonstration Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$ et $\vec{w} = (e, f)$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\vec{u} + \lambda\vec{v}, \vec{w}) &= \begin{vmatrix} a + \lambda c & e \\ b + \lambda d & f \end{vmatrix} = (a + \lambda c)f - (b + \lambda d)e = af - bd + \lambda(cf - de) \\ &= \mathcal{A}(\vec{u}, \vec{w}) + \lambda\mathcal{A}(\vec{v}, \vec{w}) \end{aligned}$$

La deuxième égalité se démontre de manière analogue. ■

De même, on peut définir dans \mathbb{R}^3 le volume algébrique engendré par trois vecteurs (il s'agit du volume d'un parallélépipède). La définition suivante est une généralisation de la notion de volume en dimension quelconque. Le point de départ est la notion de forme multilinéaire.

2) Forme multilinéaire symétrique, antisymétrique, alternée

On considère un \mathbb{K} -espace vectoriel E et un entier naturel n supérieur ou égal à 2.

Définition (forme n -linéaire) Une application $f \in \mathbb{K}^{E^n}$ est appelée une *forme n -linéaire* sur E si pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et pour tout $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \in E$, l'application :

$$f_i : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ u & \longmapsto & f(x_1, \dots, x_{i-1}, u, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{cases}$$

est linéaire.

Autrement dit, une application f est une forme n -linéaire sur E si elle est linéaire par rapport à chacune de ces n variables.

Notation. On note $\mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes n -linéaires sur E .

Remarques :

- ★ Une application $f \in \mathbb{K}^{E^2}$ est *bilinéaire* sur E si pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y, z \in E$, on a :

$$f(x + \lambda y, z) = f(x, z) + \lambda f(y, z) \quad \text{et} \quad f(x, y + \lambda z) = f(x, y) + \lambda f(x, z)$$

- ★ On montre facilement que $\mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel (en tant que sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^{E^n}).

- Exemple** ★ L'application $p : \begin{cases} \mathbb{K}^2 & \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) & \longmapsto xy \end{cases}$ est une forme bilinéaire sur \mathbb{K} .
- ★ L'application $f : \begin{cases} \mathcal{M}_p(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (A, B) & \longmapsto \text{tr}(A^T B) \end{cases}$ est une forme bilinéaire sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Démonstration Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(A + \lambda B, C) &= \text{tr}((A + \lambda B)^T C) = \text{tr}((A^T + \lambda B^T)C) && \text{(linéarité de la trace)} \\ &= \text{tr}(A^T C + \lambda B^T C) && \text{(bilinearité du produit matriciel)} \\ &= \text{tr}(A^T C) + \lambda \text{tr}(B^T C) \\ &= f(A, C) + \lambda f(B, C) \end{aligned}$$

On montre de la même façon que :

$$f(A, B + \lambda C) = f(A, B) + \lambda f(A, C)$$

Donc $f \in \mathcal{L}_2(\mathcal{M}_p(\mathbb{R}), \mathbb{R})$. ■

- ★ L'application \mathcal{A} définie dans la partie précédente est bilinéaire sur \mathbb{R} .

Définition (forme symétrique, antisymétrique, alternée) Soit $f \in \mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$. On dit que :

- ★ f est *symétrique* si pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$, on a la propriété suivante :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad i < j \implies f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

- ★ f est *antisymétrique* si pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$, on a la propriété suivante :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad i < j \implies f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

- ★ f est *alternée* si pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$, on a la propriété suivante :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad (i < j \text{ et } x_i = x_j) \implies f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = 0$$

Exemple On reprend les exemples précédents.

- ★ La forme bilinéaire p est symétrique.
- ★ La forme bilinéaire \mathcal{A} est antisymétrique et alternée.
- ★ La forme bilinéaire f est symétrique.

Démonstration Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} f(B, A) &= \text{tr}(B^T A) = \text{tr}((A^T B)^T) = \text{tr}(A^T B) && \text{(propriété de la trace)} \\ &= f(A, B) \end{aligned}$$

Ainsi, f est symétrique. ■

Proposition (antisymétrie et transposition) Soit $f \in \mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$. L'application f est antisymétrique si et seulement si, pour toute transposition $\tau \in S_n$ et pour tous $x_1, \dots, x_n \in E$, on a :

$$f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) = \underbrace{\varepsilon(\tau)}_{=-1} f(x_1, \dots, x_n)$$

Démonstration C'est immédiat par définition de l'antisymétrie et d'une transposition. ■

3) Premières propriétés

Proposition (alterné vs antisymétrie) Soit $f \in \mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$. Alors :

$$f \text{ est alternée} \iff f \text{ est antisymétrique}$$

Démonstration On raisonne par double implication.

\implies On suppose que f est alternée. Soient $x_1, \dots, x_n \in E$ et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i < j$. Calculons le scalaire :

$$\alpha = f(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n)$$

D'une part, comme f est alternée, on a $\alpha = 0$ et d'autre part, la n -linéarité de f nous donne (on développe l'expression par rapport aux i^e et j^e coordonnées) :

$$\begin{aligned} \alpha &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_n) \\ &= \underbrace{f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_n)}_{=0} + f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \\ &\quad + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) + \underbrace{f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_n)}_{=0} \\ &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n) \end{aligned}$$

en utilisant à nouveau la caractéristique alternée de f . On en déduit que :

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

et donc f est antisymétrique.

\impliedby On suppose que f est antisymétrique. Soient $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i < j$ et $x_1, \dots, x_n \in E$ tels que $x_i = x_j$. Comme f est antisymétrique, on a :

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

Or $x_i = x_j$, donc cette égalité se réécrit $f(x_1, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_n)$, soit encore $2f(x_1, \dots, x_n) = 0$ i.e. $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. La forme f est donc alternée. ■

Notation. On note $\Lambda_n(E)$ l'ensemble des formes n -linéaires alternées (i.e. antisymétriques) sur E . On vérifie facilement que $\Lambda_n(E)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel (en tant que sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$).

Proposition (image d'une famille liée par une forme alternée) Soit $f \in \Lambda_n(E)$. Pour toute famille *liée* $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, on a $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Démonstration Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ une famille liée. Alors il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = 0_E$. Soit $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. On a :

$$x_{i_0} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} \right) x_i = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \mu_i x_i$$

en posant $\mu_i := -\frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_0\}$. En utilisant la linéarité de f par rapport à la i_0^e variable, il vient :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f \left(x_1, \dots, x_{i_0-1}, \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \mu_i x_i, x_{i_0+1}, \dots, x_n \right) \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^n \mu_i f(x_1, \dots, x_{i_0-1}, x_i, x_{i_0+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_0\}$, le vecteur x_i apparaît (au moins) deux fois au sein de la famille :

$$(x_1, \dots, x_{i_0-1}, x_i, x_{i_0+1}, \dots, x_n)$$

donc $f(x_1, \dots, x_{i_0-1}, x_i, x_{i_0+1}, \dots, x_n) = 0$ (car f est alternée). Finalement, $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. ■

Proposition (forme alternée et permutation) Soit $f \in \Lambda_n(E)$. Alors :

$$\forall \sigma \in S_n, \forall x_1, \dots, x_n \in E, \quad f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n)$$

Démonstration Tout d'abord, la propriété est immédiate si $\sigma = \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$ car $\varepsilon(\text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}) = 1$. Soit maintenant $\sigma \in S_n \setminus \{\text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}\}$. On peut décomposer σ comme un produit de transpositions : il existe $p \in \mathbb{N}^*$ et des transpositions $\tau_1, \dots, \tau_p \in S_n$ telles que $\sigma = \tau_p \dots \tau_1$. Soit $x_1, \dots, x_n \in E$. Montrons par récurrence que :

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \underbrace{f(x_{(\tau_k \dots \tau_1)(1)}, \dots, x_{(\tau_k \dots \tau_1)(n)})}_{\text{propriété notée } \mathcal{P}_k} = \varepsilon(\tau_k \dots \tau_1) f(x_1, \dots, x_n)$$

★ Comme f est alternée, on a :

$$f(x_{\tau_1(1)}, \dots, x_{\tau_1(n)}) = \varepsilon(\tau_1) f(x_1, \dots, x_n)$$

La propriété \mathcal{P}_1 est donc vraie.

★ Soit $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$. On suppose que \mathcal{P}_k est vraie. Comme f est alternée, on a :

$$\begin{aligned} f(x_{(\tau_{k+1} \tau_k \dots \tau_1)(1)}, \dots, x_{(\tau_{k+1} \tau_k \dots \tau_1)(n)}) &= f(x_{\tau_{k+1}((\tau_k \dots \tau_1)(1))}, x_{\tau_{k+1}((\tau_k \dots \tau_1)(n))}) \\ &= \varepsilon(\tau_{k+1}) f(x_{(\tau_k \dots \tau_1)(1)}, \dots, x_{(\tau_k \dots \tau_1)(n)}) \\ &= \varepsilon(\tau_{k+1}) \varepsilon(\tau_k \dots \tau_1) f(x_1, \dots, x_n) \quad (\text{car } \mathcal{P}_k \text{ est vraie}) \\ &= \varepsilon(\tau_{k+1} \tau_k \dots \tau_1) f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

car ε est un morphisme de groupes. La propriété \mathcal{P}_{k+1} est donc vraie.

Le résultat souhaité est la proposition \mathcal{P}_p (qui est vraie par principe de récurrence simple). ■

III – Déterminant

Dans cette partie, on considère un entier naturel n non nul, un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

1) Déterminant d'une famille de vecteurs

Théorème (expression du déterminant dans une base) Il existe une unique forme n -linéaire alternée $f \in \Lambda_n(E)$ telle que $f(\mathcal{B}) = 1$. Cette application, notée $\det_{\mathcal{B}}$ est appelée déterminant dans la base \mathcal{B} et est déterminée par :

$$\forall x_1, \dots, x_n \in E, \quad \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{\sigma(i), i}$$

Démonstration On raisonne par analyse-synthèse.

- ★ Supposons que $f \in \Lambda_n(E)$ soit telle que $f(\mathcal{B}) = 1$. Soit $x_1, \dots, x_n \in E$. Comme $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe une unique famille $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j}) \in \mathbb{K}^n$ de scalaires telle que :

$$x_j = \sum_{i=1}^n x_{i,j} e_i$$

Alors (en utilisant la multilinéarité de f) :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f\left(\sum_{i=1}^n x_{i,1} e_i, x_2, \dots, x_n\right) = \sum_{i=1}^n x_{i,1} f\left(e_i, \sum_{i'=1}^n x_{i',2} e_{i'}, x_3, \dots, x_n\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{i'=1}^n x_{i,1} x_{i',2} f(e_i, e_{i'}, x_3, \dots, x_n) \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i_1=1}^n \dots \sum_{i_n=1}^n x_{i_1,1} \dots x_{i_n,n} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_n \leq n} x_{i_1,1} \dots x_{i_n,n} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) \end{aligned}$$

Soit $i_1, \dots, i_n \in \llbracket 1, n \rrbracket$. S'il existe $j, k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $j < k$ et $i_j = i_k$, alors $e_{i_j} = e_{i_k}$ et comme f est alternée, il vient $f(e_{i_1}, \dots, e_{i_n}) = 0$. Ainsi, les seuls n -uplets $(i_1, \dots, i_n) \in \llbracket 1, n \rrbracket^n$ pouvant donner une contribution non nulle dans la somme sont ceux pour lesquels $\{i_1, \dots, i_n\} = \llbracket 1, n \rrbracket$. Or, se donner un tel n -uplet revient à considérer la permutation :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \in S_n$$

On en déduit que :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(n),n} f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

En utilisant la proposition précédente, on obtient :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{\sigma(i),i} \right) f(e_1, \dots, e_n) \quad (*)$$

et comme $f(\mathcal{B}) = 1$ par hypothèse, on a bien :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{\sigma(i),i}$$

Ceci prouve l'unicité d'une forme n -linéaire alternée f sur E telle que $f(\mathcal{B}) = 1$.

- ★ Dans la synthèse, il faut vérifier que l'application f précédemment obtenue est une forme n -linéaire alternée sur E telle que $f(\mathcal{B}) = 1$. Cette partie de la démonstration n'est pas exigible en MPSI. ■

Remarque : on a donc $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Exemple Déterminons l'expression du déterminant dans \mathbb{R}^2 et dans \mathbb{R}^3 relativement à la base canonique.

- ★ On note $\mathcal{B}_{\text{can}} = ((1, 0), (0, 1))$ la base canonique de \mathbb{R}^2 . Soient $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^2 . Par définition du déterminant, on a :

$$\det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(x, y) = \sum_{\sigma \in S_2} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)}$$

Or $S_2 = \left\{ \text{Id}_{\llbracket 1, 2 \rrbracket}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ donc :

$$\det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

★ On note $\mathcal{B}_{\text{can}} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Soient $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ et $z = (z_1, z_2, z_3)$ des vecteurs de \mathbb{R}^3 . Par définition du déterminant, on a :

$$\det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(x, y, z) = \sum_{\sigma \in S_3} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} z_{\sigma(3)}$$

Or :

$$\begin{aligned} S_3 &= \{\text{Id}_{\llbracket 1,3 \rrbracket}, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 3), (1\ 2), (2\ 3)\} \\ &= \{\text{Id}_{\llbracket 1,3 \rrbracket}, (1\ 2)(2\ 3), (1\ 3)(3\ 2), (1\ 3), (1\ 2), (2\ 3)\} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(x, y, z) = \underbrace{x_1 y_2 z_3}_{\text{Id}} + \underbrace{x_2 y_3 z_1}_{(1\ 2\ 3)} + \underbrace{x_3 y_1 z_2}_{(1\ 3\ 2)} - \underbrace{x_3 y_2 z_1}_{(1\ 3)} - \underbrace{x_2 y_1 z_3}_{(1\ 2)} - \underbrace{x_1 y_3 z_2}_{(2\ 3)} \quad (\text{r\`egle de Sarrus})$$

On note :

$$\det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(x, y, z) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Exemple On a :

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

Proposition ($\Lambda_n(E, \mathbb{K})$ est de dimension 1) Soit \mathcal{B} une base de E .

★ L'ensemble $\Lambda_n(E, \mathbb{K})$ est la droite vectorielle engendrée par $\det_{\mathcal{B}}$:

$$\Lambda_n(E, \mathbb{K}) = \text{Vect}(\det_{\mathcal{B}}) = \{\lambda \det_{\mathcal{B}} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

★ Pour tout $f \in \Lambda_n(E, \mathbb{K})$, on a l'égalité :

$$f = f(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$$

Démonstration ★ L'inclusion :

$$\text{Vect}(\det_{\mathcal{B}}) \subset \Lambda_n(E, \mathbb{K})$$

est immédiate car $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n -linéaire alternée sur E et car $\Lambda_n(E, \mathbb{K})$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel. L'inclusion réciproque provient de l'égalité (*) obtenue dans la démonstration du théorème fournissant l'expression du déterminant. Ainsi, on a l'égalité annoncée. Comme $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$, la forme n -linéaire alternée $\det_{\mathcal{B}}$ n'est pas nulle, donc $\dim(\Lambda_n(\mathbb{K})) = 1$.

★ Soit $f \in \Lambda_n(E, \mathbb{K})$. On sait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. En évaluant en \mathcal{B} , on obtient :

$$f(\mathcal{B}) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \lambda,$$

et donc $f = f(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$. ■

Le déterminant permet de caractériser les bases d'un espace vectoriel.

Corollaire (caractérisation des bases) Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E .

Alors :

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } E \iff \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$$

Démonstration On raisonne par double implication.

\Rightarrow Supposons que $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ soit une base de E . Alors $\det_{\mathcal{F}} \in \Lambda_n(E)$ et, plus précisément :

$$\det_{\mathcal{F}} = \det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$$

En évaluant en \mathcal{F} , on obtient :

$$1 = \det_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}) = \det_{\mathcal{F}}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$$

Par conséquent, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$.

\Leftarrow On suppose que \mathcal{F} n'est pas une base de E . Comme $\text{card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$, la famille \mathcal{F} est liée. Comme $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n -linéaire alternée, on a $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 0$. ■

Corollaire (formule de changement de base) Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E . Alors :

$$\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}$$

Démonstration C'est une application directe du deuxième point de la proposition précédente. ■

2) Déterminant d'une matrice carrée

Définition (déterminant d'une matrice) Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *déterminant de M* , noté $\det(M)$, le déterminant de la famille des vecteurs colonnes de M dans la base canonique de \mathbb{K}^n .

Notation. Le déterminant de $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ sera également noté :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,n} \end{vmatrix}$$

Remarque : si $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a donc :

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n m_{\sigma(i),i}$$

Exemple ★ On a $\det(I_n) = 1$.

Démonstration En notant \mathcal{B}_{can} la base canonique de \mathbb{K}^n , on a par définition du déterminant d'une matrice :

$$\det(I_n) = \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{B}_{\text{can}}) = 1,$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

★ Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{K}$, alors on sait que :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Proposition (propriétés du déterminant) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

- ★ $\det(A^T) = \det(A)$;
- ★ $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$;
- ★ $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\det(A^k) = \det(A)^k$;
- ★ $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Démonstration ★ On a :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), i} = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i), \sigma^{-1}(\sigma(i))} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{j=1}^n a_{j, \sigma^{-1}(j)} \end{aligned}$$

en effectuant le changement d'indice $j = \sigma^{-1}(i)$ dans le produit (ce qui est licite puisque σ est bijective de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$). L'application :

$$\theta : \begin{cases} S_n & \longrightarrow S_n \\ \sigma & \longmapsto \sigma^{-1} \end{cases}$$

est bijective (car $\theta \circ \theta = \text{Id}_{S_n}$) donc :

$$\det(A) = \sum_{\tau \in S_n} \prod_{j=1}^n a_{j, \tau(j)} = \det(A^T)$$

★ Notons (A_1, \dots, A_n) la famille des vecteurs colonnes de A et \mathcal{B}_{can} la base canonique de \mathbb{K}^n . On a :

$$\begin{aligned} A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) &\iff (A_1, \dots, A_n) \text{ est une base de } \mathbb{K}^n \iff \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(A_1, \dots, A_n) \neq 0 \\ &\iff \det(A) \neq 0 \end{aligned}$$

★ On note \mathcal{B}_{can} la base canonique de \mathbb{K}^n et on considère l'application :

$$\varphi : \begin{cases} (\mathbb{K}^n)^n & \longrightarrow \mathbb{K} \\ (C_1, \dots, C_n) & \longmapsto \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(AC_1, \dots, AC_n) \end{cases}$$

Vérifions que $\varphi \in \Lambda_n(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$.

- Soient $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $C_1, \dots, C_n, D_k \in \mathbb{K}^n$. Alors :

$$\begin{aligned} &\varphi(C_1, \dots, C_{k-1}, C_k + \lambda D_k, C_{k+1}, \dots, C_n) \\ &= \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(AC_1, \dots, AC_{k-1}, A(C_k + \lambda D_k), AC_{k+1}, \dots, AC_n) \\ &= \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(AC_1, \dots, AC_{k-1}, AC_k + \lambda AD_k, AC_{k+1}, \dots, AC_n) \\ &= \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(AC_1, \dots, AC_{k-1}, AC_k, AC_{k+1}, \dots, AC_n) + \lambda \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(AC_1, \dots, AC_{k-1}, AD_k, AC_{k+1}, \dots, AC_n) \\ &= \varphi(C_1, \dots, C_{k-1}, C_k, C_{k+1}, \dots, C_n) + \lambda \varphi(C_1, \dots, C_{k-1}, D_k, C_{k+1}, \dots, C_n) \end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi \in \mathcal{L}_n(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$.

- Soient $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{K}^n$ et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $i < j$ et $C_i = C_j$. Alors $AC_i = AC_j$ et comme $\det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$ est alternée, on a :

$$\det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(AC_1, \dots, AC_n) = 0 \quad \text{i.e.} \quad \varphi(C_1, \dots, C_n) = 0$$

Ainsi, φ est alternée. Nous avons donc démontré que $\varphi \in \Lambda_n(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$.

D'après la description géométrique de $\Lambda_n(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ (il s'agit de la droite vectorielle dirigée par $\det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$), on a :

$$\varphi = \varphi(\mathcal{B}_{\text{can}}) \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}} = \det(A) \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$$

car :

$$\begin{aligned} \varphi(\mathcal{B}_{\text{can}}) &= \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}} \left(A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(A_1, \dots, A_n) \quad (\text{en notant } A_1, \dots, A_n \text{ les vecteurs colonnes de } A) \\ &= \det(A) \end{aligned}$$

par définition du déterminant d'une matrice. On en déduit que (en notant B_1, \dots, B_n les vecteurs colonnes de B) :

$$\varphi(B_1, \dots, B_n) = \det(A) \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(B) = \det(A) \det(B)$$

tandis que :

$$\begin{aligned} \varphi(B_1, \dots, B_n) &= \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(AB_1, \dots, AB_n) = \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((AB)_1, \dots, (AB)_n) \\ &= \det(AB) \end{aligned}$$

Donc $\det(AB) = \det(A) \det(B)$. La deuxième partie de la propriété s'obtient par récurrence.

★ Cette formule provient du caractère n -linéaire du déterminant. En effet :

$$\det(\lambda A) = \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\lambda A_1, \dots, \lambda A_n) = \lambda^n \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(A_1, \dots, A_n) = \lambda^n \det(A)$$

par définition du déterminant d'une matrice. ■

Corollaire Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Démonstration Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Comme A est inversible, on sait que $\det(A) \neq 0$ et que :

$$\det(I_n) = 1 = \det(AA^{-1}) = \det(A) \det(A^{-1})$$

d'où le résultat en divisant par $\det(A)$. ■

Remarque : l'application $\det : \text{GL}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}^*$ est donc un morphisme de groupes.

3) Déterminant d'un endomorphisme

Proposition/définition Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Le scalaire $\det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ ne dépend pas du choix de la base \mathcal{B} de E . On l'appelle *déterminant de l'endomorphisme f de E* et il est noté $\det(f)$.

Démonstration Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E et $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' . On sait alors que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P$$

donc (propriété relative au déterminant du produit de deux matrices) :

$$\begin{aligned} \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)) &= \det(P^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P) \\ &= \det(P^{-1}) \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \det(P) \\ &= \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \end{aligned}$$

en utilisant le corollaire précédent. ■

 **Exercice** Soit l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + 2y, -x - y) \end{cases}$$

L'endomorphisme f est-il bijectif? Justifier.

Proposition (propriétés du déterminant) Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

- ★ $\det(g \circ f) = \det(g) \det(f)$;
- ★ pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\det(f^k) = \det(f)^k$;
- ★ $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$;
- ★ $f \in \text{GL}(E) \iff \det(f) \neq 0$.

Démonstration Tout découle des propriétés du déterminant matriciel. Par exemple, pour la première propriété, et en fixant une base \mathcal{B} de E , on a :

$$\begin{aligned} \text{deg}(g \circ f) &= \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f)) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \\ &= \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g)) \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) \\ &= \det(g) \det(f) \end{aligned}$$

Les autres propriétés se démontrent de la même manière. ■

IV – Calculs pratiques

1) Déterminant d'une matrice triangulaire

Il est très facile de calculer le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire.

Lemme Soit $\sigma \in S_n$ tel que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sigma(k) \leq k$$

Alors $\sigma = \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$.

Démonstration Démontrons que pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\sigma(k) = k$ en utilisant une récurrence forte.

- ★ On a $\sigma(1) \leq 1$ et $\sigma(1) \in \llbracket 1, n \rrbracket$ par hypothèse. On a donc $\sigma(1) = 1$.
- ★ Soit $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. On suppose que pour tout $\ell \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on a $\sigma(\ell) = \ell$. De plus, $1 \leq \sigma(k + 1) \leq k + 1$ et σ est injective. On en déduit que :

$$\sigma(k + 1) \in \llbracket 1, k + 1 \rrbracket \setminus \{\sigma(1), \dots, \sigma(k)\} \quad \text{i.e.} \quad \sigma(k + 1) \in \llbracket 1, k + 1 \rrbracket \setminus \llbracket 1, k \rrbracket$$

par hypothèse de récurrence. Ainsi, $\sigma(k + 1) = k + 1$.

Par principe de récurrence forte, on peut conclure que $\sigma = \text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$. ■

Proposition (déterminant d'une matrice triangulaire) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure). Alors :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$$

Démonstration Quitte à remplacer A par A^T (ce qui ne change pas la valeur du déterminant), on peut supposer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{K})$. Autrement dit :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad i > j \implies a_{i,j} = 0$$

Par définition du déterminant, on a :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{\sigma(i),i}$$

Soit $\sigma \in S_n \setminus \{\text{Id}\}$. D'après le lemme précédent (et sa forme contraposée), il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\sigma(i) > i$; on a alors $a_{\sigma(i),i} = 0$. Il reste :

$$\det(A) = \varepsilon(\text{Id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}) \prod_{i=1}^n a_{i,i} = \prod_{i=1}^n a_{i,i},$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

Exemple ★ Pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on a :

$$\det(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)) = \lambda_1 \times \dots \times \lambda_n$$

★ On a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -5$$

2) Effet des opérations élémentaires sur le déterminant

Rappelons que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si A_1, \dots, A_n désignent les vecteurs colonnes de A , alors (on note \mathcal{B}_{can} la base canonique de \mathbb{K}^n) :

$$\det(A) = \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(A_1, \dots, A_n)$$

et on sait que $\det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$ est une forme n -linéaire alternée.

Il peut être judicieux d'effectuer des opérations élémentaires sur les colonnes du déterminant afin de le calculer. Les effets sur la valeur du déterminant sont les suivants.

- ★ Échanger deux colonnes (opération notée $C_i \leftrightarrow C_j$) multiplie le déterminant par -1 .
Cela provient du fait que $\det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$ est alternée.
- ★ Multiplier une colonne par un scalaire non nul λ ($C_i \leftarrow \lambda C_i$) multiplie le déterminant par λ .
Cela provient du fait que $\det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$ est linéaire par rapport à chaque variable.
- ★ Ajouter une colonne à une autre ($C_i \leftarrow C_i + C_j$, où $j \neq i$), ou ajouter à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes ($C_i \leftarrow C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j$) ne modifie pas la valeur du déterminant.

On peut également faire des opérations élémentaires sur les lignes et les effets sont les mêmes (puisque'une matrice et sa transposée ont le même déterminant).

Exemple Soit $x \in \mathbb{C}$. On pose :

$$D_n(x) = \underbrace{\begin{vmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}}_{n \times n}$$

On a $D_n(x) = (x + n - 1)(x - 1)^{n-1}$.

Démonstration En effectuant l'opération élémentaire $C_1 \leftarrow C_1 + \dots + C_n$, on obtient :

$$D_n(x) = (x + n - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}$$

Pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on effectue maintenant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i - L_1$, ce qui donne :

$$D_n(x) = (x + n - 1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & x - 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x - 1 \end{vmatrix} = (x + n - 1)(x - 1)^{n-1},$$

le dernier déterminant étant celui d'une matrice triangulaire (supérieure). ■

3) Développement suivant une ligne ou une colonne

Le résultat que nous allons présenter dans cette partie est très utile en pratique.

Définition (mineur et cofacteur) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- ★ On appelle *mineur* d'indices i et j de A la matrice extraite suivante :

$$\text{Min}_{i,j}(A) = (a_{i,j})_{\substack{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\} \\ \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{j\}}}$$

- ★ On appelle *cofacteur* d'indices i et j le scalaire :

$$\text{Cof}_{i,j}(A) = (-1)^{i+j} \det(\text{Min}_{i,j}(A))$$

Remarques :

- ★ Pour obtenir le mineur d'indices i et j , on supprime donc la ligne i et la colonne j de la matrice A .
- ★ Pour une matrice de taille 3×3 , il y a donc 9 mineurs et autant de cofacteurs.

Exemple Pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, on a :

i	j	$\text{Min}_{i,j}(A)$	$\text{Cof}_{i,j}(A)$
1	1	$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$	$5 \times 9 - 6 \times 8$
1	2	$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$	$4 \times 9 - 7 \times 6$
1	3		
2	1		
2	2		
2	3		
3	1		
3	2		
3	3	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$1 \times 5 - 4 \times 2$

Théorème (développement par rapport à une ligne ou une colonne) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

★ Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \text{Cof}_{i,j}(A)$$

On dit qu'on a développé $\det(A)$ par rapport à la j^{e} colonne de A .

★ Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \text{Cof}_{i,j}(A)$$

On dit qu'on a développé $\det(A)$ par rapport à la i^{e} ligne de A .

Démonstration Posons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et notons A_1, \dots, A_n les matrices colonnes de A . Soit encore $\mathcal{B}_{\text{can}} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de \mathbb{K}^n .

★ Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a :

$$\forall \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad A_\ell = \sum_{i=1}^n a_{i,\ell} e_i$$

En utilisant la linéarité de $\det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$ par rapport à la j^{e} variable, on a :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(A_1, \dots, A_{j-1}, A_j, A_{j+1}, \dots, A_n) \\ &= \det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}\left(A_1, \dots, A_{j-1}, \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i, A_{j+1}, \dots, A_n\right) \\ &= \sum_{i=1}^n a_{i,j} \underbrace{\det_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(A_1, \dots, A_{j-1}, e_j, A_{j+1}, \dots, A_n)}_{\text{noté } D_{i,j}} \end{aligned}$$

Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Réécrivons le déterminant $D_{i,j}$:

$$D_{i,j} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & a_{i-1,j-1} & 0 & & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

En effectuant successivement les opérations élémentaires $C_j \leftrightarrow C_{j+1}$ puis $C_{j+1} \leftrightarrow C_{j+2}$ jusqu'à la permutation $C_{n-1} \leftrightarrow C_n$, on a :

$$D_{i,j} = (-1)^{n-j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots & 0 \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n} & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} & 0 \end{vmatrix}$$

On effectue ensuite les opérations élémentaires $L_i \leftrightarrow L_{i+1}$, $L_{i+1} \leftrightarrow L_{i+2}$, $L_{n-1} \leftrightarrow L_n$ pour obtenir :

$$D_{i,j} = \underbrace{(-1)^{2n-(i+j)}}_{=(-1)^{i+j}} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots & 0 \\ \vdots & & & a_{j+1,j+1} & & \vdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} & 0 \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} & 1 \end{vmatrix}$$

En explicitant ce déterminant (avec la définition), les seules permutations σ de S_n qui donnent une contribution non nulle sont celles telles que $\sigma(n) = n$. On obtient :

$$D_{i,j} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & a_{i-1,j-1} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & a_{j+1,j+1} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \det(\text{Min}_{i,j}(A)) = \text{Cof}_{i,j}(A),$$


Ceci démontre la formule annoncée.

★ On procède de la même manière pour obtenir la deuxième identité. ■

Exemple En développant par rapport à la première colonne, on a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + (-2) \times \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

En pratique, on calcule un déterminant en faisant des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes (pour simplifier le calcul du déterminant) et on se ramène à la proposition précédente.

 **Exercice** Calculer le déterminant $D = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

4) Déterminant de Vandermonde

Théorème (déterminant de Vandermonde) Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. On pose :

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \det \left((x_i^{j-1})_{1 \leq i, j \leq n} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad (\text{déterminant de Vandermonde})$$

$n \times n$

Alors :

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

En particulier, ce déterminant est non nul si et seulement si les scalaires x_1, \dots, x_n sont deux à deux distincts.

Démonstration Pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, on effectue l'opération élémentaire $C_k \leftarrow C_k - x_n C_{k-1}$ (dans l'ordre décroissant) :

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 - x_n & x_1(x_1 - x_n) & \dots & x_1^{n-2}(x_1 - x_n) \\ 1 & x_2 - x_n & x_2(x_2 - x_n) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} - x_n & x_{n-1}(x_{n-1} - x_n) & \dots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_n) \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

On développe ce déterminant par rapport à la dernière ligne :

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} x_1 - x_n & x_1(x_1 - x_n) & \dots & x_1^{n-2}(x_1 - x_n) \\ x_2 - x_n & x_2(x_2 - x_n) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n-1} - x_n & x_{n-1}(x_{n-1} - x_n) & \dots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_n) \end{vmatrix} \quad (\text{déterminant d'ordre } n)$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on remarque la présence du facteur $x_i - x_n$ sur la i^e ligne du déterminant donc, par multilinéarité, on obtient :

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = (-1)^2 (-1)^{n-1} \left(\prod_{i=1}^{n-1} (x_i - x_n) \right) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}}_{(n-1) \times (n-1)}$$

i.e. :

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \right) V_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (*)$$

On conclut quant à la formule annoncée à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

★ On a :

$$V_2(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 = \prod_{1 \leq i < j \leq 2} (x_j - x_i)$$

★ Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. Si $V_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i)$ alors, d'après (*), on a :

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \right) \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (x_j - x_i) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Le théorème est démontré. ■

Retour sur l'interpolation polynomiale et les polynômes de Lagrange

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et des scalaires $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ où x_1, \dots, x_n sont deux à deux distincts. Dans le chapitre 18, nous avons démontré le résultat suivant.

Théorème (polynôme interpolateur de Lagrange) Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(x_k) = y_k$$

Plus exactement, il s'agit du polynôme :

$$P = \sum_{i=1}^n y_i L_i$$

où L_1, \dots, L_n sont les polynômes de Lagrange associés aux scalaires x_1, \dots, x_n , c'est-à-dire :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad L_i = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$$

L'existence et l'unicité d'un tel polynôme peut être (re)démontré à l'aide du théorème précédent sur le déterminant de Vandermonde.

Démonstration Soit $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$. Alors :

$$(*) : (\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(x_i) = y_i) \iff \left(\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_j x_i^j = y_i \right)$$

$$\iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{\text{matrice notée } \mathcal{V}_n(x_1, \dots, x_n)} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Les scalaires x_1, \dots, x_n sont deux à deux distincts donc :

$$\det(\mathcal{V}_n(x_1, \dots, x_n)) = V_n(x_1, \dots, x_n) \neq 0$$

On en déduit que le système (*) admet une unique solution, ce qu'il fallait démontrer. ■

5) Inversion de matrices

Pour une matrice de taille 2×2 inversible, on dispose d'une expression explicite de la matrice inverse. Nous allons voir qu'il en est de même pour les matrices carrées inversibles de tailles supérieures.

Définition (comatrice) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle *comatrice* de A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notée $\text{Com}(A)$, dont le coefficient en position $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ est le cofacteur $\text{Cof}_{i,j}(A)$.

Exemple ★ Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, alors $\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

★ Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors $\text{Com}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$A \text{Com}(A)^T = \text{Com}(A)^T A = \det(A) I_n$$

Ainsi, si $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, on a :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Com}(A)^T$$

Démonstration Posons $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $A \text{Com}(A)^T = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$. Soient $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On sait que :

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} (\text{Com}(A)^T)_{k,j} = b_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \text{Cof}_{j,k}(A)$$

On distingue deux cas.

★ **Premier cas** : $j = i$

Alors :

$$b_{i,i} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \text{Cof}_{i,k}(A) = \det(A)$$

en développant le déterminant de A par rapport à la ligne i .

★ **Deuxième cas** : $j \neq i$

Ici :

$$b_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \text{Cof}_{j,k}(A) = 0$$

En effet, ce déterminant est celui de la matrice de taille $n \times n$ dont toutes les lignes sont celles de A , sauf la j^{e} qui correspond à la i^{e} ligne de A . Comme cette matrice à deux lignes identiques, le déterminant est nul.

Ainsi, $A \text{Com}(A)^T = \det(A) I_n$. On procède de la même manière pour obtenir l'égalité $\text{Com}(A)^T A = \det(A) I_n$. ■

Exemple ★ Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{K})$, on retrouve l'expression de l'inverse :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

★ Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors $\det(A) = -1 \neq 0$ (on développe le déterminant par rapport à la première ligne) donc A est inversible et :

$$A^{-1} = - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$