

# APPLICATIONS LINÉAIRES : ASPECT MATRICIEL

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Matrice(s) d'une application linéaire</b>	<b>1</b>
1.1	Matrices et vecteurs . . . . .	1
1.2	Matrices et applications linéaires . . . . .	2
1.3	Application linéaire canoniquement associée à une matrice . . . . .	4
1.4	De la matrice à l'application linéaire associée . . . . .	5
1.5	Matrice et composition d'applications linéaires . . . . .	6
1.6	Critères d'inversibilité pour une matrice . . . . .	8
1.7	Retour sur les systèmes linéaires . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Changements de base</b>	<b>10</b>
2.1	Matrices de passage . . . . .	10
2.2	Formules de changement de base . . . . .	10
2.2.1	Pour un vecteur . . . . .	10
2.2.2	Pour une application linéaire . . . . .	11
2.3	Matrices équivalentes . . . . .	11
2.4	Calcul pratique du rang d'une matrice ou d'une application linéaire . . . . .	13
2.5	Matrices extraites . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Matrices semblables</b>	<b>15</b>
3.1	Trace d'une matrice carrée . . . . .	15
3.2	Trace d'un endomorphisme . . . . .	15
3.3	Notion de matrices semblables . . . . .	16

Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne l'un des deux corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . On considère ici trois espaces vectoriels  $E, F$  et  $G$ , tous différents de l'espace nul, et que l'on suppose de dimensions finies respectives  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $q \in \mathbb{N}^*$ . On munit  $E$  d'une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ ,  $F$  d'une base  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$  et  $G$  d'une base  $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_q)$ .

## I – Matrice(s) d'une application linéaire

### 1) Matrices et vecteurs

**Définition (matrice d'un vecteur dans une base donnée)** Soit  $x \in E$ . Il existe une unique familles de scalaires  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  telle que  $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ . On appelle *matrice de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$* , notée  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ , la matrice colonne :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

**Remarque :** pour tout  $x \in E$ , on a donc  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} e_1^*(x) \\ \vdots \\ e_n^*(x) \end{pmatrix}$ , où  $e_1^*, \dots, e_n^*$  désignent les formes linéaires coordonnées sur  $E$ .

**Exemple** Dans la base  $\mathcal{B} = ((1, 0), (1, 1))$  de  $\mathbb{R}^2$ , on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y) = (x - y) \cdot (1, 0) + y \cdot (1, 1)$$

donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}((x, y)) = \begin{pmatrix} x - y \\ y \end{pmatrix}$$

On peut également définir la matrice d'une famille de vecteurs  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_k)$  dans la base  $\mathcal{B}$  de  $E$

**Définition (matrice d'une famille de vecteurs de  $E$  dans la base  $\mathcal{B}$ )** Soient  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_k$  des vecteurs de  $E$ . On appelle *matrice de la famille  $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_k)$  dans la base  $\mathcal{B}$  de  $E$* , l'élément de  $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})$ , noté  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ , dont la  $j^{\text{e}}$  colonne ( $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ) est la matrice de  $x_j$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Autrement dit :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (e_i^*(u_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}}$$

**Exemple** Dans la base canonique  $\mathcal{B}_{\text{can}} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$  de  $\mathbb{R}^3$ , la matrice de la famille  $\mathcal{F} = ((1, 0, 1), (0, 2, 3))$  est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

## 2) Matrices et applications linéaires

La définition précédente permet de définir la matrice d'une application linéaire relativement à des bases des espaces de départ et d'arrivée.

**Définition** Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . On appelle *matrice de  $u$  dans les bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  de  $E$  et  $F$* , notée  $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ , la matrice de la famille  $u(\mathcal{B})$  dans la base  $\mathcal{C}$  de  $F$ , i.e. :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\mathcal{B}))$$

**Remarques.**

- ★ Il est important de constater que cette matrice est de taille  $p \times n$ , i.e. de taille  $\dim(F) \times \dim(E)$ .
- ★ Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  et si  $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ , cette matrice est notée  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  (au lieu de  $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$ ). On parle alors de *matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$* .
- ★ En notant  $f_1^*, \dots, f_p^*$  les formes linéaires coordonnées sur  $F$ , on a donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = (f_i^*(u(e_j)))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$$

**Exemple** ★ Considérons l'application linéaire suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x + y, x + y, 3y) \end{cases}$$

Posons  $\mathcal{B} = ((1, 0), (1, 1))$  et  $\mathcal{C} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1))$ . On vérifie facilement que  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  sont des bases de  $\mathbb{R}^2$  et de  $\mathbb{R}^3$  respectivement. De plus :

$$f(1, 0) = (2, 1, 0) = 2 \cdot (1, 0, 0) + 1 \cdot (0, 1, 0) + 0 \cdot (0, 1, 1)$$

et :

$$f(1, 1) = (3, 2, 3) = 3 \cdot (1, 0, 0) + (-1) \cdot (0, 1, 0) + 3 \cdot (0, 1, 1)$$

On a donc :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

★ On munit le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$  de la base  $\mathcal{B} = (1, i)$ . On considère l'application et la similitude  $f_{a,b} : z \in \mathbb{C} \mapsto az + b\bar{z}$ . On peut vérifier que cette application est linéaire (rappelons que  $\mathbb{C}$  est ici un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel) et la matrice de  $f_{a,b}$  dans la base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{C}$  est :

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} \text{Re}(a) + \text{Re}(b) & -\text{Im}(a) + \text{Im}(b) \\ \text{Im}(a) + \text{Im}(b) & \text{Re}(a) - \text{Re}(b) \end{pmatrix}$$

En effet :

$$f_{a,b}(1) = a + b = (\text{Re}(a) + \text{Re}(b)) + (\text{Im}(a) + \text{Im}(b))i$$

et :

$$f_{a,b}(i) = ai - bi = (-\text{Im}(a) + \text{Im}(b)) + (\text{Re}(a) - \text{Re}(b))i$$

**Remarques.**

★ On a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(0_{\mathcal{L}(E,F)}) = 0_{p,n} \quad (\text{matrice nulle})$$

★ On a également  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_n$ . Par contre, si  $E$  est muni de deux bases différentes  $\mathcal{B} \neq \mathcal{C}$ , alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\text{Id}_E) \neq I_n$ .

**Exemple** Si on munit  $\mathbb{R}^2$  des bases  $\mathcal{B} = ((1, 0), (1, 1))$  et  $\mathcal{C} = ((1, 0), (0, 1))$ , alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I_2$$

**Proposition** ( $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels) L'application :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} : \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

**Démonstration** ★ Soient  $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Par définition de la matrice d'une application linéaire, on a :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u + \lambda v) &= (f_i^*((u + \lambda v)(e_j)))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \\ &= (f_i^*(u(e_j) + \lambda v(e_j)))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \quad (\text{par définition de } u + \lambda v) \\ &= (f_i^*(u(e_j)) + \lambda f_i^*(v(e_j)))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \quad (\text{car } f_1^*, \dots, f_p^* \in F^*) \\ &= (f_i^*(u(e_j)))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} + \lambda (f_i^*(v(e_j)))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \end{aligned}$$

par définition d'une combinaison linéaire de matrices de mêmes tailles. Autrement dit :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u + \lambda v) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) + \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(v)$$

Ainsi,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E, F), \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}))$ .

★ Montrons que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$  est injective. Soit  $u \in \text{Ker}(\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}})$ . Alors  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = 0_{p,n}$  donc :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad u(e_j) = 0_F$$

Par linéarité de  $u$ , il vient :

$$\forall x \in E, \quad u(x) = \sum_{j=1}^n e_j^*(x)u(e_j) = \sum_{j=1}^n e_j^*(x) \cdot 0_F = 0_F$$

donc  $u = 0_{\mathcal{L}(E, F)}$ . Ainsi,  $\text{Ker}(\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}) \subset \{0_{\mathcal{L}(E, F)}\}$  et comme l'inclusion réciproque est immédiate, on a l'égalité  $\text{Ker}(\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}) = \{0_{\mathcal{L}(E, F)}\}$ . Autrement dit,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$  est injective.

★ Les espaces vectoriels  $\mathcal{L}(E, F)$  et  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  sont de même dimension finie (égale à  $n \times p$ ) donc l'injectivité de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$  entraîne sa bijectivité.

La proposition est donc démontrée. ■

### 3) Application linéaire canoniquement associée à une matrice

La proposition précédente permet de définir l'application linéaire canoniquement associée à une matrice donnée.

**Définition (application linéaire canoniquement associée à une matrice)** Soit  $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ . On appelle *application linéaire canoniquement associée à A*, notée  $f_A$ , l'unique application linéaire  $f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$  dont la matrice dans les bases canoniques de  $\mathbb{K}^n$  et de  $\mathbb{K}^p$  est A.

**Exemple** L'application linéaire canoniquement associée à la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$  est :

$$f_A : \begin{cases} \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z) \end{cases}$$

**Démonstration** En effet, comme  $A$  est la matrice de  $f_A$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^3$  et de  $\mathbb{R}^2$ , on a :

$$f(1, 0, 0) = (1, 4), \quad f(0, 1, 0) = (2, 5) \quad \text{et} \quad f(0, 0, 1) = (3, 6)$$

Pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , comme  $(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$ , la linéarité de  $f_A$  nous donne :

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= xf(1, 0, 0) + yf(0, 1, 0) + zf(0, 0, 1) = x(1, 4) + y(2, 5) + z(3, 6) \\ &= (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z) \end{aligned}$$

Cette identification permet de définir le noyau, l'image et le rang d'une matrice :

**Définition (noyau, image et rang d'une matrice)** Soit  $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  d'application linéaire canoniquement associée notée  $f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ . On définit le noyau, l'image, et le rang de  $A$  comme suit :

$$\text{Ker}(A) = \text{Ker}(f_A), \quad \text{Im}(A) = \text{Im}(f_A) \quad \text{et} \quad \text{rg}(A) = \text{rg}(f_A)$$

**Remarque :** souvent, on confond les espaces vectoriels  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  et  $\mathbb{K}^n$ .

**Exemple** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ . Alors :

$$\text{Ker}(A) = \text{Vect}((1, -2, 1)), \quad \text{Im}(A) = \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \text{rg}(A) = 2$$

**Démonstration** ★ Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Alors :

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \text{Ker}(A) &\iff (x, y, z) \in \text{Ker}(f_A) \iff (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 & \text{L}_1 \\ 4x + 5y + 6z = 0 & \text{L}_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 & \text{L}_1 \\ -3y - 6z = 0 & \text{L}_2 \leftarrow \text{L}_2 - 4\text{L}_1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases} \\ &\iff (x, y, z) \in \text{Vect}((1, -2, 1)), \end{aligned}$$

d'où la première affirmation.

★ D'après le théorème du rang, on sait que :

$$\text{rg}(f_A) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker}(f_A)),$$

*i.e. :*

$$\text{rg}(A) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker}(A)) = 3 - 1 = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$$

On en déduit que  $f_A$  est surjective, donc  $\text{Im}(A) = \text{Im}(f_A) = \mathbb{R}^2$ . ■

**Remarques :**

- ★ Les colonnes d'une matrice  $A$  constituent donc une famille génératrice de  $\text{Im}(A)$  et le rang de  $A$  est celui formé par les vecteurs colonnes de  $A$ .
- ★ Quant aux lignes, elles fournissent un système d'équations cartésiennes de  $\text{Ker}(A)$ . Plus précisément, on remarque que :

$$\text{Ker}(A) = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0_{p,1} \right\}$$

- ★ Supposons qu'il existe  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  tel que  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ . On sait que le rang de  $A$  est le rang de la famille des vecteurs colonnes de  $A$ . Autrement dit :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(u(\mathcal{B})) = \text{rg}(u)$$

#### 4) De la matrice à l'application linéaire associée

**Proposition** Soient  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $x \in E$ . Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

**Démonstration** Soit  $x \in E$ . Par linéarité de  $u$ , on a :

$$\begin{aligned} u(x) &= u\left(\sum_{j=1}^n e_j^*(x)e_j\right) = \sum_{j=1}^n e_j^*(x)u(e_j) = \sum_{j=1}^n e_j^*(x) \sum_{i=1}^p f_i^*(u(e_j))f_i \\ &= \sum_{i=1}^p \left(\sum_{j=1}^n f_i^*(u(e_j))e_j^*(x)\right) f_i \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{E}}(u(x)) &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n f_1^*(u(e_j))e_j^*(x) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n f_p^*(u(e_j))e_j^*(x) \end{pmatrix} = \left(f_i^*(u(e_j))\right)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \begin{pmatrix} e_1^*(x) \\ \vdots \\ e_n^*(x) \end{pmatrix} \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{E}}(u) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

**Exemple** Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$  l'application linéaire dont la matrice dans les bases :

$$\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = ((1, 0), (1, 1))$$

de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}^2$  est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'expression analytique de  $f$  est :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (3x - 2y - 2z, 2x - y - z) \end{cases}$$

**Démonstration** Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Alors :

$$(x, y, z) = (x - y)(1, 0, 0) + (y - z)(1, 1, 0) + z(1, 1, 1) \quad \text{i.e.} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}((x, y, z)) = \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \\ z \end{pmatrix}$$

D'après la proposition, on a :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x, y, z)) &= M \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - y \\ y - z \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x - y - z \\ 2x - y - z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$f(x, y, z) = (x - y - z)(1, 0) + (2x - y - z)(1, 1) = (3x - 2y - 2z, 2x - y - z),$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

## 5) Matrice et composition d'applications linéaires

**Proposition** Soient  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{G}}(v \circ u) = \text{Mat}_{\mathcal{G}, \mathcal{D}}(v) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{E}}(u)$$

En particulier, si  $u \in \mathcal{L}(E)$ , alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^n) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u))^n$$

**Démonstration** ★ Le deuxième point se déduit immédiatement du premier à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

★ Démontrons la première formule. Soient  $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On sait que :

$$(\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(v \circ u))_{i,j} = g_i^*((v \circ u)(e_j))$$

Or, par linéarité de  $u$  et de  $v$ , on a :

$$\begin{aligned} (v \circ u)(e_j) &= v(u(e_j)) = v\left(\sum_{\ell=1}^p f_\ell^*(u(e_j))f_\ell\right) \\ &= \sum_{\ell=1}^p f_\ell^*(u(e_j))v(f_\ell) \\ &= \sum_{\ell=1}^p f_\ell^*(u(e_j)) \sum_{k=1}^q g_k^*(v(f_\ell))g_k \\ &= \sum_{k=1}^q \left(\sum_{\ell=1}^p g_k^*(v(f_\ell))f_\ell^*(u(e_j))\right) g_k \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} (\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(v \circ u))_{i,j} &= \sum_{\ell=1}^p g_i^*(v(f_\ell))f_\ell^*(u(e_j)) \\ &= \sum_{\ell=1}^p (\text{Mat}_{\mathcal{G}, \mathcal{D}}(v))_{i,\ell} (\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{E}}(u))_{\ell,j}, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait établir (d'après la formule donnant les coefficients d'une matrice produit). ■

**Corollaire** ( $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$  est un isomorphisme d'anneaux) L'application :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'anneaux.

**Démonstration** ★ On sait déjà que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}} = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels de  $\mathcal{L}(E)$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . En particulier,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$  est bijective et est telle que :

$$\forall u, v \in \mathcal{L}(E), \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u + v) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) + \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$$

★ De plus :

$$\forall u, v \in \mathcal{L}(E), \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v \circ u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$$

et :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_n,$$

donc  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$  est un morphisme d'anneaux. ■

**Remarque :** si  $n = \dim(E) \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , alors  $\mathcal{L}(E)$  n'est pas commutatif (pour la composition) puisque  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ne l'est pas (pour le produit).

**Corollaire (bijectivité/inversibilité)** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

- ★  $f$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $F$  si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$  est inversible ;
- ★ dans ce cas, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f))^{-1}$$

**Démonstration** On raisonne par double implication.

- ★ Supposons que  $f$  soit un isomorphisme de  $E$  sur  $F$ . On sait que  $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$  et on a :

$$I_n = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f^{-1} \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1}) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$$

De la même façon :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1}) = I_n$$

On en déduit que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$  est inversible d'inverse  $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1})$ .

- ★ Réciproquement, supposons que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$  soit inversible. Notons  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  son inverse et  $g$  l'application linéaire de  $F$  vers  $E$  dont la matrice dans les bases  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{B}$  est  $M$ . Alors on a les égalités :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = M \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = I_n = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E)$$

Or l'application  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}$  est injective donc  $g \circ f = \text{Id}_E$ . On montre de la même manière que  $f \circ g = \text{Id}_F$ . Finalement,  $f$  est bijective de  $E$  sur  $F$ . ■

**Exemple** L'application linéaire  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x - y, x + 3y) \end{cases}$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .

**Démonstration** Il s'agit de montrer que  $f$  est bijective. La matrice  $M$  de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^2$  est  $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Or  $\det(M) = 6 + 1 = 7 \neq 0$  donc  $M$  est inversible. On en déduit que  $f$  est bijective. Finalement,  $f \in \text{GL}(\mathbb{R}^2)$ . ■

## 6) Critères d'inversibilité pour une matrice

**Proposition** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On suppose qu'il existe  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que :

- ★  $AB = I_n$  (on dit que  $A$  est *inversible à droite*) ;
- ★ ou bien  $BA = I_n$  (on dit que  $A$  est *inversible à gauche*).

Alors  $A$  est inversible d'inverse  $A^{-1} = B$ .

**Démonstration** Notons  $f_A$  et  $f_B$  les endomorphismes de  $\mathbb{K}^n$  canoniquement associés aux matrices  $A$  et  $B$  et  $\mathcal{B}_{\text{can}}$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ . L'égalité  $AB = I_n$  se réécrit :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(g) = I_n \quad \text{i.e.} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(f \circ g) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}(\text{Id}_{\mathbb{K}^n})$$

L'application  $\text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$  est injective donc  $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{K}^n}$ . On en déduit que  $f$  est bijective de réciproque  $f^{-1} = g$ . Par conséquent, la matrice  $A$  est inversible d'inverse  $B$ . Le deuxième point se démontre de manière analogue. ■

**Proposition** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Les assertions suivantes sont équivalentes.

- ★  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$
- ★  $\text{Ker}(A) = \{0\}$
- ★ les colonnes de  $A$  forment une base de  $\mathbb{K}^n$
- ★  $\text{rg}(A) = n$

**Démonstration** Soit  $f_A$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  canoniquement associé à  $A$ . On sait que :

$$A \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \iff f_A \text{ bijective} \iff f_A \text{ injective} \iff f_A \text{ surjective,}$$

d'où les différentes équivalences. ■

**Conséquence :** une matrice  $T \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cup \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$  (triangulaire) est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

### 7) Retour sur les systèmes linéaires

Soient  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ . On considère le système linéaire :

$$\mathcal{S} : AX = B$$

d'inconnue  $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ . Le système linéaire homogène associé est :

$$\mathcal{H} : AX = 0_{n,1}$$

Si  $\text{Sol}(\mathcal{H})$  désigne l'ensemble des solutions de  $\mathcal{H}$ , alors on a l'égalité :

$$\text{Sol}(\mathcal{H}) = \text{Ker}(A)$$

**Définition (rang d'un système)** On appelle rang de  $\mathcal{S}$ , noté  $\text{rg}(\mathcal{S})$ , le rang de la matrice  $A$ , *i.e.* :

$$\text{rg}(\mathcal{S}) = \text{rg}(A)$$

**Remarque :**  $\text{rg}(\mathcal{S}) \leq \min(n, p)$ .

**Proposition** L'espace vectoriel  $\text{Sol}(\mathcal{H}) \subset \mathbb{K}^p$  est de dimension  $p - r$ , où  $r = \text{rg}(\mathcal{S})$ .

**Démonstration** Notons  $f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$  l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ . Alors (par définition du rang d'une matrice et en utilisant le théorème du rang) :

$$\text{rg}(f_A) = \text{rg}(A) = r = \dim(\mathbb{K}^p) - \dim(\text{Ker}(A)) = p - \dim(\text{Sol}(\mathcal{H})),$$

d'où l'on déduit l'égalité annoncée. ■

**Remarque :** si  $n < p$  (le système a donc moins d'équations que d'inconnues), alors  $r \leq p$  et donc  $\dim(\text{Sol}(\mathcal{H})) > 0$ . Le système homogène admet donc une infinité de solutions.

## II – Changements de base

Dans cette partie,  $E$  et  $F$  sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies. On suppose que :

- ★  $E$  est de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  sont deux bases de  $E$  ;
- ★  $F$  est de dimension  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  sont deux bases de  $F$ .

### 1) Matrices de passage

**Définition (matrice de passage)** On appelle *matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$*  la matrice carrée notée  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  suivante :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

La matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  est aussi notée  $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  ou encore  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ .

**Remarque :** on a  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E)$ .

**Démonstration** Par définition de la matrice d'une application linéaire, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\text{Id}_E(\mathcal{B})) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'},$$

ce qu'il fallait établir. ■

**Exemple** Dans  $\mathbb{R}^2$ , considérons les bases  $\mathcal{B} = ((1, 0), (0, 1))$  et  $\mathcal{B}' = ((1, 0), (1, 1))$ . Alors :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car d'une part :

$$(1, 0) = 1 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (0, 1) \quad \text{et} \quad (1, 1) = 1 \cdot (1, 0) + 1 \cdot (0, 1)$$

et, d'autre part :

$$(1, 0) = 1 \cdot (1, 0) + 0 \cdot (1, 1) \quad \text{et} \quad (0, 1) = -1 \cdot (1, 1) + 1 \cdot (1, 1)$$

**Proposition** Les propriétés des matrices de passage sont les suivantes :

- ★  $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  ;
- ★  $(P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$ .

**Démonstration** D'après la formule donnant la matrice d'une composition d'applications linéaires, on a :

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} &= \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}_E) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{Id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E \circ \text{Id}_E) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) \\ &= I_n, \end{aligned}$$

ce qui justifie les deux propriétés annoncées. ■

### 2) Formules de changement de base

#### (a) Pour un vecteur

Connaissant les coordonnées d'un vecteur dans une base  $\mathcal{B}$  donnée, la matrice de passage  $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$  permet d'obtenir les coordonnées du vecteur dans la nouvelle base  $\mathcal{B}'$ .

**Proposition** Pour tout  $x \in E$ , on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

**Démonstration** Pour tout  $x \in E$ , on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{Id}_E) \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x),$$

d'où le résultat d'après la remarque précédente. ■

**Exemple** Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Considérons la base  $\mathcal{B} = ((1, 0), (1, 1))$  de  $\mathbb{R}^2$ . Alors, en notant également  $\mathcal{B}_{\text{can}} = ((1, 0), (0, 1))$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ , on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}((x, y)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}}((x, y)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y \end{pmatrix}$$

### (b) Pour une application linéaire

Les matrices de passages permettent également de trouver la matrice d'une application linéaire dès lors que l'on change les bases des espaces  $E$  et  $F$ .

**Théorème (formules de changement de bases)** ★ Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(u) = P_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$$


★ En particulier, si  $u \in \mathcal{L}(E)$ , alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P \quad \text{où} \quad P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$$

**Démonstration** On a :

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(\text{Id}_F \circ f \circ \text{Id}_E) \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{C}', \mathcal{C}'}(\text{Id}_F) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{Id}_E) \\ &= P_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \end{aligned}$$

La deuxième formule est une conséquence immédiate de la première. ■

 **Exercice** Considérons une base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  et l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B}$  est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On considère les vecteurs  $\varepsilon_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3$ ,  $\varepsilon_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$  et  $\varepsilon_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ . Vérifier que  $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer la matrice de  $f$  dans celle-ci.

### 3) Matrices équivalentes

**Définition (matrices équivalentes)** Deux matrices  $A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  sont dites *équivalentes* s'il existe deux matrices inversibles  $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$  et  $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telles que  $B = P^{-1}AQ$ .

**Remarques :** deux matrices, qui représentent une même application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , sont équivalentes.

**Démonstration** Soient  $A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ . Supposons qu'il existe  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , deux bases  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  de  $E$  et deux bases  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  de  $F$  telles que  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$  et  $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f)$ . En posant  $P = P_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'} \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$  et  $Q = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ , alors on sait d'après les formules de changement de base que  $B = P^{-1}AQ$ . Les matrices  $A$  et  $B$  sont donc équivalentes. ■

**Proposition** La relation d'équivalence sur les matrices de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  est une relation d'équivalence.

**Démonstration** On note  $\sim$  la relation définie sur  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  par :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}), \quad A \sim B \iff (\exists (P, Q) \in \text{GL}_p(\mathbb{K}) \times \text{GL}_n(\mathbb{K}), B = P^{-1}AQ)$$

Il s'agit de montrer que la relation  $\sim$  est réflexive, symétrique et transitive.

- ★ Les matrices  $I_p$  et  $I_n$  sont inversibles et, pour tout  $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ , on a l'égalité  $A = I_p^{-1}AI_n$  donc  $A \sim A$ . La relation  $\sim$  est donc réflexive.
- ★ Soient  $A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  telles que  $A \sim B$ . Il existe alors  $(P, Q) \in \text{GL}_p(\mathbb{K}) \times \text{GL}_n(\mathbb{K})$  tel que  $B = P^{-1}AQ$ . On en déduit que :

$$A = PBQ^{-1} = (P^{-1})^{-1}BQ^{-1}$$

et on a  $P^{-1} \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$  et  $Q^{-1} \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ . On a donc  $B \sim A$ . La relation  $\sim$  est donc symétrique.

- ★ Soient  $A, B, C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ . On suppose que  $A \sim B$  et que  $B \sim C$ . Il existe alors  $P, R \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$  et  $Q, S \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  tels que  $B = P^{-1}AQ$  et  $C = R^{-1}BS$ . On en déduit que :

$$C = R^{-1}BS = R^{-1}(P^{-1}AQ)S = (PR)^{-1}A(QS)$$

par associativité du produit matriciel (et les propriétés de l'inverse dans un groupe). Comme  $PR \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$  et  $QS \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  (un produit de matrices inversibles étant inversible), on peut conclure que  $A \sim C$ . La relation  $\sim$  est donc transitive.

Finalement,  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ , ce qu'il fallait démontrer. ■

**Théorème (matrice  $J_r$ )** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  de rang noté  $r$  (on a  $r \in \llbracket 0, \min(n, p) \rrbracket$ ). Il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  et une base  $\mathcal{C}$  de  $F$  dans laquelle la matrice de  $f$  est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = J_r$$

où :

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{p-r, r} & 0_{p-r, n-r} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$

Cette matrice  $J_r$  est appelée *matrice canonique de rang  $r$* .

**Démonstration** Comme  $E$  est de dimension finie :

- ★ le théorème du rang nous donne  $\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(E) - \text{rg}(f) = n - r$ ;
- ★ le sous-espace vectoriel  $\text{Ker}(f)$  de  $E$  admet un supplémentaire  $G$  dans  $E$  de dimension  $r$ .

Considérons une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  adaptée à la décomposition  $E = G \oplus \text{Ker}(f)$  (la famille  $(e_1, \dots, e_r)$  est une base de  $G$  et  $(e_{r+1}, \dots, e_n)$  est une base de  $\text{Ker}(f)$ ). La famille  $(e_1, \dots, e_r)$  est libre dans  $G$  et  $f|_G$  est injective (puisque  $G \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\}$ ) donc la famille :

$$(f|_G(e_1), \dots, f|_G(e_r)) = (f(e_1), \dots, f(e_r))$$

est libre. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille en une base  $\mathcal{C}$  de  $F$ . On constate alors que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = J_r$ . ■

**Proposition** Soient  $A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $A$  et  $B$  sont équivalentes ;
- (ii)  $A$  et  $B$  sont des matrices d'une même application linéaire ;
- (iii)  $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$ .

**Démonstration** On montre successivement les différentes implications (i)  $\Rightarrow$  (ii), (ii)  $\Rightarrow$  (iii) et (iii)  $\Rightarrow$  (i).

**(i)  $\Rightarrow$  (ii)** On suppose que (i) est vraie. Soit  $f_A$  l'application canoniquement associée à  $A$  et notons  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  les bases canoniques de  $\mathbb{K}^n$  et de  $\mathbb{K}^p$  respectivement. Alors  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f_A)$ . Comme  $B$  est équivalente à  $A$ , il existe  $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$  et  $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telles que  $A = P^{-1}BQ$ . Si on note  $\mathcal{C}'$  la famille des colonnes de la matrice  $P$  et  $\mathcal{B}'$  la famille des colonnes de la matrice  $Q$ , on sait que  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{C}'$  sont des bases de  $\mathbb{K}^n$  et  $\mathbb{K}^p$  (car  $Q$  et  $P$  sont inversibles) et on a  $P = P_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}$  et  $Q = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ . Ainsi :

$$B = P_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f_A) P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f_A)$$

d'après les formules de changement de base. Finalement,  $A$  et  $B$  sont les matrices d'une même application linéaire. Donc (ii) est vraie.

**(ii)  $\Rightarrow$  (iii)** Supposons que (ii) soit vraie et soit  $f$  une application linéaire admettant pour matrices  $A$  et  $B$  dans des bases de  $E$  et de  $F$ . On sait que  $\text{rg}(A) = \text{rg}(f)$  et que  $\text{rg}(B) = \text{rg}(f)$ . Donc (iii) est vraie.

**(iii)  $\Rightarrow$  (i)** On suppose que  $A$  et  $B$  soit de même rang noté  $r$ . Soient  $f_A$  et  $f_B$  les applications linéaires canoniquement associées à  $A$  et à  $B$  respectivement. On a  $\text{rg}(f_A) = \text{rg}(f_B) = r$  donc, dans des bases adaptées,  $f_A$  et  $f_B$  admettent pour matrice la matrice  $J_r$ . Donc, par changement de base,  $A$  est équivalente à  $B$ . ■

**Corollaire** Une matrice  $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  est de rang  $r \in \llbracket 1, \min(p, n) \rrbracket$  si et seulement si elle est équivalente à la matrice  $J_r$  (de taille  $p \times n$ ).

**Démonstration** Cette équivalence provient de la proposition précédente et du fait que  $\text{rg}(J_r) = r$ . ■

#### 4) Calcul pratique du rang d'une matrice ou d'une application linéaire


Revenons sur les opérations élémentaires vues dans le chapitre sur les systèmes linéaires et les matrices.

**Proposition** Soit  $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ .

- ★ Lorsque l'on effectue des opérations élémentaires sur les lignes de  $A$  on ne modifie pas le noyau de  $A$  ni le rang de  $A$ .
- ★ Lorsque l'on effectue des opérations élémentaires sur les colonnes de  $A$ , l'image de  $A$  et le rang sont inchangés.

**Démonstration** Soit  $f$  l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ . Effectuer une opération élémentaire sur les lignes de  $A$  revient à multiplier  $A$  à gauche par une matrice inversible (de transvection, de dilatation ou de permutation). Si  $A'$  est la nouvelle matrice, alors  $A$  et  $A'$  sont équivalentes. Elles ont donc le même rang. ■

**Remarque :** cette proposition permet de calculer le rang d'une matrice/application linéaire en utilisant l'algorithme du pivot de Gauss.

 **Exercice** Calculer le rang de  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ .

**Proposition** Pour tout  $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ , on a  $\text{rg}(M^T) = \text{rg}(M)$ .

**Démonstration** On note  $J_r$  (respectivement  $J'_r$ ) la matrice élémentaire de taille  $p \times n$  (respectivement  $n \times p$ ). Notons  $r$  le rang de  $A$ . Alors  $A$  est équivalente à  $J_r$ ; il existe donc  $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$  et  $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telles que  $A = P^{-1}J_rQ$ , ce qui implique que :

$$A^T = Q^T J'_r (P^T)^{-1}$$

Donc  $A^T$  est équivalente à  $J'_r$ , d'où le résultat. ■

### 5) Matrices extraites

**Définition (matrice extraite)** Soit  $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ . On appelle *matrice extraite* de  $A$  toute matrice de la forme  $A' = (a_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$  où  $I$  et  $J$  sont des parties non vides de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  et  $\llbracket 1, n \rrbracket$  respectivement.

**Remarque :** il s'agit de ne conserver qu'un certain nombre de lignes et de colonnes de la matrice initiale. Par exemple, les matrices  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  sont extraites de  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

L'intérêt des matrices extraites réside dans le résultat suivant.

**Proposition** Soient  $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  et  $r \in \llbracket 1, \min(p, n) \rrbracket$ . Alors  $A$  est de rang  $r$  si et seulement si :

- (i) il existe une matrice extraite de  $A$  carrée de taille  $r \times r$  inversible ;
- (ii) et toute matrice extraite de  $A$  est de rang au plus  $r$ .

**Démonstration** On raisonne par double implication.

★ On suppose que (i) et (ii) sont satisfaites. Comme  $A$  est extraite de  $A$ , on a  $\text{rg}(A) \leq r$  d'après (ii). Si  $C_1, \dots, C_r$  correspondent aux  $r$  colonnes de la matrice  $A$  qui ont été retenues pour trouver une matrice extraite de  $A$  inversible de taille  $r \times r$ , on a les inégalités :

$$\text{rg}(A) \geq \text{rg}(C_1, \dots, C_r) = r$$

donc  $\text{rg}(A) = r$ .

★ Réciproquement, supposons que  $A$  soit de rang  $r$ . On peut trouver une famille libre de  $r$  vecteurs colonnes de la matrice  $A$  qui soit de rang  $r$  (par définition du rang d'une matrice). On peut donc extraire une matrice  $A'$  de  $A$  de taille  $p \times r$  dont les colonnes forment une famille libre de vecteurs de  $\mathbb{K}^n$ . Or  $\text{rg}(A'^T) = \text{rg}(A') = r$  donc on peut extraire  $r$  lignes de  $A'$  formant une famille libre de  $\mathbb{K}^r$ , d'où le résultat. ■

**Exemple**  $\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \geq 3$  car la matrice  $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  est inversible

### III – Matrices semblables

#### 1) Trace d’une matrice carrée

**Définition (trace)** Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice carrée. On appelle *trace* de  $A$ , notée  $\text{tr}(A)$ , le scalaire :

$$\text{tr}(A) = \sum_{k=1}^n a_{k,k}$$

**Remarque :** la trace d’une matrice carrée est donc la somme de ses coefficients diagonaux.

**Exemple**  $\star \text{tr}(I_n) = n$

$$\star \text{tr} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -10 & 2 \end{pmatrix} = 3$$

Les propriétés algébriques de la trace sont les suivantes.

**Proposition (propriétés de la trace)**  $\star$  On a  $\text{tr} \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$  (autrement dit,  $\text{tr}$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ), *i.e.* :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \text{tr}(A + \lambda B) = \text{tr}(A) + \lambda \text{tr}(B)$$

$\star$  Pour tout  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a  $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$ .

$\star$  Pour tout  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a l’égalité :

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

$\star$  Pour tous  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a :

$$\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$$

**Démonstration**  $\star$  Le premier point a déjà été démontré (chapitre 23, section hyperplans). Quant au deuxième, il est évident.

$\star$  Soient  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  et  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  deux matrices carrées d’ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Alors :

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n (AB)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{k,i} a_{i,k} \\ &= \sum_{k=1}^n (BA)_{k,k} \\ &= \text{tr}(BA) \end{aligned}$$

$\star$  Pour tous  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a en utilisant l’associativité du produit matriciel et le point précédent :

$$\begin{aligned} \text{tr}(P^{-1}AP) &= \text{tr}((P^{-1}A)P) = \text{tr}(P(P^{-1}A)) = \text{tr}((PP^{-1})A) \\ &= \text{tr}(I_n A) \\ &= \text{tr}(A) \end{aligned} \quad \blacksquare$$

#### 2) Trace d’un endomorphisme

**Proposition/définition** Soient  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Le scalaire  $\text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$  ne dépend pas de la base  $\mathcal{B}$  choisie dans  $E$ . On l'appelle trace de  $f$  et on le note  $\text{tr}(f)$ .

**Démonstration** Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . On pose :

$$M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \quad \text{et} \quad M' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$$

Soit encore  $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ . On sait que  $M' = P^{-1}MP$  donc, en utilisant le dernier point de la proposition précédente :

$$\text{tr}(M') = \text{tr}(P^{-1}MP) = \text{tr}(M),$$

d'où le résultat. ■

**Exemple**  $\star$  On a  $\text{Tr}(\text{Id}_E) = \dim(E)$ .

$\star$  Si  $p \in \mathcal{L}(E)$  est un projecteur de  $E$ , alors  $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$ .

**Démonstration**  $\star$  Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , alors :

$$\text{tr}(\text{Id}_E) = \text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E)) = \text{tr}(I_n) = n$$

$\star$  Soit  $p \in \mathcal{L}(E)$  un projecteur de  $E$ . On sait que  $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$ . En notant  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  la dimension de  $\text{Ker}(p)$ , on peut considérer une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  adaptée à la décomposition  $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$ , ce qui signifie que :

- (i)  $(e_1, \dots, e_k)$  est une base de  $\text{Ker}(p)$  (en particulier :  $\forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, p(e_i) = 0$ );
- (ii)  $(e_{k+1}, \dots, e_n)$  est une base de  $\text{Im}(p)$  (comme  $p$  est un projecteur de  $E$ , on a donc  $p(e_i) = e_i$  pour tout  $i \in \llbracket k+1, n \rrbracket$ ).

La matrice de  $p$  dans la base  $\mathcal{B}$  est alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{p-k} \end{pmatrix}$$

ce qui implique que :

$$\text{tr}(p) = n - k = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(p)) = \text{rg}(p)$$

d'après le théorème du rang. ■

**Proposition** Soient  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ . Alors :

$$\text{tr}(v \circ u) = \text{tr}(u \circ v)$$

**Démonstration** Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Alors :

$$\begin{aligned} \text{tr}(v \circ u) &= \text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v \circ u)) = \text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) \\ &= \text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)) \quad (\text{propriété de la trace pour des matrices}) \\ &= \text{tr}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u \circ v)) \\ &= \text{tr}(u \circ v) \end{aligned}$$

par définition de la trace d'un endomorphisme. ■

### 3) Notion de matrices semblables

**Définition (matrices semblables)** Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  et  $B$  sont semblables s'il existe  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que  $B = P^{-1}AP$ .

**Remarques.**

- ★ Deux matrices (carrées) semblables sont équivalentes, mais la réciproque est fautive (des matrices carrées équivalentes ne sont pas nécessairement semblables).
- ★ Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ . Alors :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)P$$

donc les matrices  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  sont semblables. Réciproquement, si deux matrices sont semblables, alors on peut montrer que ces matrices sont celles d'un même endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$ .

- ★ On vérifie facilement que la similitude des matrices (carrées de même taille) est une relation d'équivalence.

**Proposition** Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  deux matrices semblables. Alors  $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$ .

**Démonstration** Nous l'avons déjà démontré. ■

**Remarque :** la réciproque est fautive. Les matrices  $0_2$  et  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  ont la même trace (égale à 0) mais elles ne sont pas semblables (la deuxième matrice n'étant pas nulle).