

INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

Table des matières

1	Notion de continuité uniforme	1
1.1	Définition et premières propriétés	2
1.2	Théorème de Heine	3
2	Intégrale des fonctions en escalier	4
2.1	Notion de subdivision de $[a, b]$	4
2.2	Notion de fonction en escalier	4
2.3	Intégrale d'une fonction en escalier	5
3	Intégrale de Riemann d'une fonction continue par morceaux	7
3.1	Notion de fonction continue par morceaux	7
3.2	Densité de $\mathcal{E}(a, b)$ dans $\mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{R})$	8
3.3	Intégrale d'une fonction continue par morceaux	9
3.4	Propriétés de l'intégrale	11
3.5	Notation $\int_b^a f$	13
4	Intégrales et primitives	13
4.1	Existence de primitive	13
4.2	Rappels : quelques méthodes de calcul intégral	15
4.2.1	Intégration par parties	15
4.2.2	Changement de variable	15
5	Méthode des rectangles à gauche	16
6	Formules de Taylor	17
6.1	Formule de Taylor avec reste intégral	17
6.2	Applications	18
6.2.1	Inégalité de Taylor-Lagrange	18
6.2.2	Formule de Taylor-Young	19
7	Brève extension de l'intégrale aux fonctions à valeurs complexes	19

Le premier objectif de ce chapitre est de définir *proprement* l'intégrale d'une fonction continue sur un segment.

I – Notion de continuité uniforme

Dans tout cette section, I désigne un intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide (autrement dit, I est non vide et non réduit à un point) et on considère une fonction $f \in \mathbb{R}^I$.

1) Définition et premières propriétés

Définition (uniforme continuité) La fonction f est dite *uniformément continue* sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x, y \in I, \quad |x - y| \leq \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Exemple ★ Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, la fonction $f_a : x \mapsto ax$ est uniformément continue sur \mathbb{R} .

★ La fonction $f : x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur $[0, 1]$ mais elle ne l'est pas sur \mathbb{R}_+ .

Démonstration ★ Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $\varepsilon > 0$. On pose $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{|a|} > 0$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, si $|x - y| \leq \delta_\varepsilon$, alors :

$$|f_a(x) - f_a(y)| = |a| \times |x - y| \leq |a| \times \delta_\varepsilon = \varepsilon$$

Donc f_a est uniformément continue sur \mathbb{R} .

★ On a :

$$\forall x, y \in [0, 1], \quad |f(x) - f(y)| = (x + y)|x - y| \leq 2|x - y|$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé dans la définition, il suffit donc de choisir $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$.

★ Par l'absurde, supposons que f soit uniformément continue sur \mathbb{R}_+ . Il existe alors $\delta > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+, \quad |x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq 1$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $|x - (x + \delta)| = \delta \leq \delta$ donc :

$$|f(x) - f(x + \delta)| = |(x + \delta)^2 - x^2| = 2\delta x + \delta^2 \leq 1,$$

Ceci est absurde car $2\delta x + \delta^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. ■

On rappelle que la fonction f est dite continue sur I si :

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_{\varepsilon, x} > 0, \forall y \in I, \quad |x - y| \leq \delta_{\varepsilon, x} \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Quand on dispose d'une fonction uniformément continue sur I , le nombre δ_ε ne dépend pas du point x choisi (d'où le terme « uniforme »).

Le lien entre les notions de continuité et d'uniforme continuité est le suivant.

Proposition (continue vs uniformément continue vs lipschitzien) On a :

$$(f \text{ lipschitzienne sur } I) \implies (f \text{ uniformément continue sur } I) \implies (f \text{ continue sur } I)$$

Démonstration ★ On suppose que f est uniformément continue sur I . Montrons que f est continue sur I . Soient $x_0 \in I$ et $\varepsilon > 0$. Par uniforme continuité de f sur I , il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in I, \quad |x - y| \leq \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

En particulier, comme $x_0 \in I$, on a :

$$\forall y \in I, \quad |x_0 - y| \leq \delta_\varepsilon \implies |f(x_0) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Autrement dit, f est continue au point x_0 . Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in I$, on conclut que f est continue sur I .

★ Supposons que f soit lipschitzienne sur I . Il existe alors $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x, y \in I, \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

Soit $\varepsilon > 0$ et posons $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{M} > 0$. Soient $x, y \in I$ tel que $|x - y| \leq \delta_\varepsilon$. Comme $M \geq 0$, on a :

$$M|x - y| \leq M\delta_\varepsilon = \varepsilon$$

et donc :

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \leq \varepsilon$$

La fonction f est donc uniformément continue sur I . ■

Remarques : les réciproques sont fausses.

- ★ La fonction $f : x \mapsto x^2$ est continue sur \mathbb{R}_+ mais n'est pas uniformément continue.
- ★ On peut montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur \mathbb{R}_+ mais qu'elle n'est pas lipschitzienne.

2) Théorème de Heine

Les notions de continuité et d'uniforme continuité sont équivalentes si on travaille sur un *segment*.

Théorème (de Heine) Toute fonction continue sur un segment y est uniformément continue.

Démonstration (non exigible en MPSI) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : \mathbb{R}^{[a,b]}$ une fonction continue. Raisonnons par l'absurde en supposant que f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$.

★ Par définition de l'uniforme continuité, il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall \delta > 0, \exists x_\delta, y_\delta \in [a, b], |x_\delta - y_\delta| \leq \delta \text{ et } |f(x_\delta) - f(y_\delta)| > \varepsilon$$

En choisissant $\delta = \frac{1}{n+1}$ dans cette assertion, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n, y_n \in [a, b]$ tels que :

$$|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$$

★ La suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée (car à valeurs dans $[a, b]$) donc elle admet une suite extraite convergente (d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass). Il existe donc une fonction $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ strictement croissante et $\ell \in [a, b]$ tels que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

★ On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leq \frac{1}{\varphi(n)+1} \leq \frac{1}{n+1} \quad (\text{car } \varphi(n) \geq n)$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{\varphi(n)} - \frac{1}{n+1} \leq y_{\varphi(n)} \leq x_{\varphi(n)} + \frac{1}{n+1}$$

Le théorème des gendarmes implique donc que $y_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

★ Par ailleurs, on sait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| > \varepsilon \tag{*}$$

et f est continue au point ℓ (puisque'elle est continue sur $[a, b]$ et $\ell \in [a, b]$). D'après la caractérisation séquentielle de la continuité, on a :

$$f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell) \quad \text{et} \quad f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité (*), on obtient $|f(\ell) - f(\ell)| \geq \varepsilon$, c'est-à-dire $\varepsilon \leq 0$, ce qui est absurde.

Finalement, f est uniformément continue sur $[a, b]$. ■

II – Intégrale des fonctions en escalier

Dans cette section, a et b désignent deux nombres réels tels que $a \leq b$. Nous commencerons par définir la notion d'intégrale pour une fonction dite *en escalier*.

1) Notion de subdivision de $[a, b]$

Définition (subdivision d'un segment) ★ On appelle *subdivision* du segment $[a, b]$ toute famille de points $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ (où $n \in \mathbb{N}$) telle que :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

★ On appelle *pas* de la subdivision σ le nombre réel strictement positif suivant :

$$\mu(\sigma) := \max\{x_{i+1} - x_i \mid i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$$

Exemple ★ La famille $\sigma = (0, \frac{1}{3}, 1)$ est une subdivision du segment $[0, 1]$ (son pas vaut $\mu(\sigma) = \frac{2}{3}$) et $\sigma' = (0, 1)$ en est une autre (on a ici $\mu(\sigma') = 1$).

★ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *subdivision régulière de rang $n \in \mathbb{N}^*$* du segment $[a, b]$, notée σ_n , la subdivision :

$$\sigma_n = \left(a + k \frac{b-a}{n} \right)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a :

$$a + (k+1) \frac{b-a}{n} - \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) = \frac{b-a}{n}$$

donc $\mu(\sigma_n) = \frac{b-a}{n}$.

2) Notion de fonction en escalier

La notion de subdivision nous permet de définir celle de fonction en escalier.

Définition (fonction en escalier) Soit $\varphi \in \mathbb{R}^{[a,b]}$.

★ On dit que φ est une *fonction en escalier* sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la fonction $\varphi|_{]x_i, x_{i+1}[}$ soit constante.

On dit alors que la subdivision σ est *adaptée* à la fonction φ .

★ On note $\mathcal{E}(a, b)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Exemple La fonction partie entière est en escalier sur l'intervalle $[-1, 3]$ et une subdivision adaptée est $\sigma = (-1, 0, 1, 2, 3)$.

Remarques :

★ On peut vérifier que le triplet $(\mathcal{E}(a, b), +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a,b]}$.

★ De même, $(\mathcal{E}(a, b), +, \times)$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{[a,b]}$.

3) Intégrale d'une fonction en escalier

Définition (intégrale d'une fonction en escalier) Soient $\varphi \in \mathcal{E}(a, b)$ et $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée. Pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on note y_i la valeur de la fonction (constante) $\varphi|_{]x_i, x_{i+1}[}$. On appelle *intégrale de φ sur le segment $[a, b]$* le nombre réel noté $\int_{[a,b]} \varphi$ suivant :

$$\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1} - x_i)$$

Remarques :

- ★ Cette intégrale se note aussi $\int_a^b \varphi$ ou $\int_a^b \varphi(t) dt$.
- ★ Si $a = b$, on a $\int_{[a,b]} \varphi = 0$ (la somme est vide).
- ★ Pour montrer que cette définition est cohérente, il faut vérifier que la valeur de l'intégrale ne dépend pas de la subdivision adaptée à φ choisie.

Démonstration ★ **Première étape :** soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à φ sur $[a, b]$. Soit encore $x \in [a, b] \setminus \sigma$. Il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $x_k < x < x_{k+1}$. Pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, notons y_i la valeur de la fonction constante $\varphi|_{]x_i, x_{i+1}[}$. Comme $x_k < x < x_{k+1}$, les fonctions $\varphi|_{]x_k, x[}$ et $\varphi|_{]x, x_{k+1}[}$ sont constantes égales à y_k . La somme de la définition ci-dessus associée à la subdivision :

$$\sigma' = (x_0, \dots, x_k, x, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

est donc égale à (en utilisant la relation de Chasles pour les sommes) :

$$\sum_{i=0}^{k-1} y_i(x_{i+1} - x_i) + y_k(x - x_k) + y_k(x_{k+1} - x) + \sum_{i=k+1}^{n-1} y_i(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1} - x_i)$$

Ainsi, la valeur de l'intégrale ne change pas si on ajoute un point à une subdivision adaptée à φ .

- ★ **Deuxième étape :** par une récurrence immédiate, on en déduit que la valeur de l'intégrale ne change pas si on rajoute un nombre fini de points à une subdivision adaptée à φ .
- ★ **Troisième étape :** si σ et σ' sont deux subdivisions adaptées à φ , alors $\Sigma = \sigma \cup \sigma'$ (on interclasse les points de σ et de σ' dans l'ordre croissant) est une subdivision adaptée à φ contenant tous les points de σ et σ' . En utilisant deux fois le deuxième point, on obtient que les sommes de la définition associées à σ et à σ' sont égales à celle associée à Σ . Finalement, l'intégrale de φ ne dépend pas de la subdivision σ ou σ' choisie. ■

Géométriquement, l'intégrale d'une fonction en escalier correspond à l'aire (algébrique) délimitée par la courbe de f (en ignorant les discontinuités) et l'axe des abscisses.

 **Exercice** Calculer $\int_{[-1,4]} |\cdot|$.

Solution. On considère la subdivision régulière de rang 5 de l'intervalle $[-1, 4]$:

$$\int_{-1}^4 |x| dx = \sum_{i=-1}^3 i(i+1-i) = -1 + 0 + 1 + 2 + 3 = 5$$

Les propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier sont les suivantes.

Proposition (propriétés de l'intégrale) Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{E}(a, b)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les propriétés de l'intégrale sont les suivantes.

★ **Linéarité de l'intégrale :**

$$\int_{[a,b]} (\varphi + \lambda\psi) = \int_{[a,b]} \varphi + \lambda \int_{[a,b]} \psi$$

★ **Relation de Chasles :**

$$\forall c \in [a, b], \quad \int_{[a,b]} \varphi = \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi$$

★ **Positivité de l'intégrale :** si $\varphi \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} \varphi \geq 0$

★ **Croissance de l'intégrale :** si $\varphi \leq \psi$ sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} \psi$

★ **Inégalité triangulaire :** on a $|\varphi| \in \mathcal{E}(a, b)$ et $\left| \int_{[a,b]} \varphi \right| \leq \int_{[a,b]} |\varphi|$

Démonstration Considérons une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ (où $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$) de $[a, b]$ qui soit adaptée aux deux fonctions en escalier φ et ψ (une telle subdivision existe : il suffit de réunir une subdivision adaptée à φ avec une subdivision adaptée à ψ).

★ Pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, notons y_i et z_i les valeurs prises par les restrictions de φ et ψ à $]x_i, x_{i+1}[$. Pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la fonction $\varphi + \lambda\psi$ est constante sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ et prend la valeur $y_i + \lambda z_i$. Donc la fonction $\varphi + \lambda\psi$ est en escalier sur $[a, b]$ et σ est une subdivision adaptée à $\varphi + \lambda\psi$. Par définition de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} (\varphi + \lambda\psi) &= \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + \lambda z_i)(x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1} - x_i) + \lambda \sum_{i=0}^{n-1} z_i(x_{i+1} - x_i) \quad (\text{linéarité de la somme}) \\ &= \int_{[a,b]} \varphi + \lambda \int_{[a,b]} \psi \end{aligned}$$

par définition de l'intégrale de φ et ψ .

★ Soit $c \in [a, b]$. Soient $\sigma_1 = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à φ sur $[a, c]$ et $\sigma_2 = (x_n, \dots, x_m)$ une subdivision adaptée à φ sur $[c, b]$ (en particulier, $x_0 = a$, $x_n = c$ et $x_m = b$). Alors :

$$\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2 = (x_0, \dots, x_n, \dots, x_m)$$

est une subdivision adaptée à φ sur $[a, b]$ et (on note encore y_i la valeur prise par φ sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$) :

$$\begin{aligned} \int_{[a,c]} \varphi + \int_{[c,b]} \varphi &= \sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1} - x_i) + \sum_{i=n}^{m-1} y_i(x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} y_i(x_{i+1} - x_i) \quad (\text{relation de Chasles pour les sommes}) \\ &= \int_{[a,b]} \varphi, \end{aligned}$$

par définition de l'intégrale de φ sur le segment $[a, b]$.

★ Si $\varphi \geq 0$ sur $[a, b]$ alors, pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $y_i \geq 0$. Ainsi :

$$\int_{[a,b]} \varphi = \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{y_i}_{\geq 0} \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{> 0} \geq 0$$

★ Supposons que $\varphi \leq \psi$. Alors la fonction $\eta = \psi - \varphi$ est une fonction en escalier (structure d'espace vectoriel de $\mathcal{E}(a, b)$) qui est de plus positive sur $[a, b]$. D'après le point précédent, on a :

$$\int_{[a,b]} \eta \geq 0 \quad \text{i.e.} \quad \int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varphi \geq 0$$

par linéarité de l'intégrale. Le résultat s'ensuit.

★ Pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la fonction $|\varphi|$ est constante égale à $|y_i|$ sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. Donc $|\varphi|$ est en escalier sur $[a, b]$ et σ en est une subdivision adaptée. On utilise ensuite l'inégalité triangulaire pour les sommes :

$$\begin{aligned} \left| \int_{[a,b]} \varphi \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1} - x_i) \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |y_i(x_{i+1} - x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} |y_i| \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{\geq 0} \\ &= \int_{[a,b]} |\varphi|, \end{aligned}$$

par définition de l'intégrale d'une fonction en escalier. ■

III – Intégrale de Riemann d'une fonction continue par morceaux

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$.

1) Notion de fonction continue par morceaux

Définition (fonction continue par morceaux) Soit $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$.

- ★ On dit que f est *continue par morceaux* sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que :
 - pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la restriction de f à l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ est continue ;
 - f admet des limites finies à gauche et à droite aux points x_1, \dots, x_{n-1} ;
 - f admet une limite finie à gauche en b et une limite finie à droite en a .

On dit que la subdivision σ est *adaptée* à la fonction f .

- ★ On note $\mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$.

Remarques :

★ On a les inclusions :

$$\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}(a, b) \subset \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b])$$

★ On peut vérifier que le triplet $(\mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b]), +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a,b]}$.

★ De même, $(\mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b]), +, \times)$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{[a,b]}$.

Exemple ★ La fonction :

$$f : \begin{cases} [-10, 3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - [x] \text{ (noté } \{x\}) \end{cases}$$

est continue par morceaux.

★ La fonction :

$$g : \begin{cases} [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$ car elle $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$.

2) Densité de $\mathcal{E}(a, b)$ dans $\mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{R})$

Le résultat suivant va nous permettre de définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux.

Théorème (de densité) Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b])$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escaliers $\varphi, \psi \in \mathcal{E}(a, b)$ telles que :

- ★ $\varphi \leq f \leq \psi$ sur $[a, b]$;
- ★ $0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon$ sur $[a, b]$.

On dit que $\mathcal{E}(a, b)$ est *dense* dans $\mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b])$.

Démonstration ★ **Première étape :** on suppose que f est continue sur $[a, b]$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a, b]$. Il existe donc $\delta_\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in [a, b], |x - y| \leq \delta_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Comme $\frac{b-a}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{n} \leq \delta_\varepsilon$. Considérons alors la subdivision régulière $\sigma_n = \left(a + k \frac{b-a}{n} \right)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ de rang n de $[a, b]$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$. Notons enfin φ et ψ les fonctions définies sur $[a, b]$ par :

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall x \in [x_i, x_{i+1}[, \quad \varphi(x) = \min_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x) \quad \text{et} \quad \psi(x) = \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x)$$

et encore $\varphi(b) = \psi(b) = f(b)$. Les extremum ci-dessus sont bien définis d'après le théorème des bornes atteintes car la fonction f est continue sur les segments $[x_i, x_{i+1}]$; de plus le minimum est atteint en un point $y_i \in [x_i, x_{i+1}]$ et le maximum est atteint en un point $z_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Par construction de φ et ψ , on a $\varphi \leq f \leq \psi$ sur $[a, b]$. Soit $x \in [a, b[$. Il existe $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $x_i \leq x < x_{i+1}$. Alors :

$$0 \leq \psi(x) - \varphi(x) = \max_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x) - \min_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x) = f(z_i) - f(y_i)$$

Or :

$$x_i \leq y_i, z_i \leq x_{i+1} \quad \text{donc} \quad |y_i - z_i| \leq |x_{i+1} - x_i| = \frac{b-a}{n} \leq \delta_\varepsilon$$

donc, par uniforme continuité de f :

$$\max_{x_i \leq x < x_{i+1}} f(x) - \min_{x_i \leq x < x_{i+1}} f(x) = f(z_i) - f(y_i) \leq \varepsilon$$

L'inégalité est enfin clairement vérifiée pour $x = b$. Finalement, on a bien $0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon$ sur $[a, b]$.

★ **Deuxième étape** : on traite le cas général. Soient $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b])$ dont une subdivision adaptée de $[a, b]$ est $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$. Soient $\varepsilon > 0$ et $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. La fonction f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ et prolongeable par continuité en x_i et en x_{i+1} donc, d'après le point précédent, il existe des fonctions en escalier φ_i et ψ_i sur $[x_i, x_{i+1}]$ telles que pour tout $x \in [x_i, x_{i+1}]$, on ait :

$$\varphi_i(x) \leq f(x) \leq \psi_i(x) \quad \text{et} \quad 0 \leq \psi_i(x) - \varphi_i(x) \leq \varepsilon$$

On notera $\tilde{\varphi}_i$ et $\tilde{\psi}_i$ les fonctions qui coïncident avec φ_i et ψ_i respectivement sur $]x_i, x_{i+1}[$ et qui sont égales à $f(x_i)$ en x_i et à $f(x_{i+1})$ en x_{i+1} . Considérons enfin les fonctions φ et ψ définies sur $[a, b]$ par :

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall x \in [x_i, x_{i+1}], \quad \varphi(x) = \tilde{\varphi}_i(x) \quad \text{et} \quad \psi(x) = \tilde{\psi}_i(x)$$

Par construction, les fonctions φ et ψ sont telles sur $[a, b]$ que $\varphi \leq f \leq \psi$ et $0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon$ sur $[a, b]$, ce qui achève la démonstration. ■

3) Intégrale d'une fonction continue par morceaux

On veut maintenant définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$. Pour tout $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{R})$, on considère les deux sous-ensembles de \mathbb{R} suivant :

$$E_-(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}(a, b), \varphi \leq f \text{ sur } [a, b] \right\}$$

et :

$$E_+(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \mid \varphi \in \mathcal{E}(a, b), \varphi \geq f \text{ sur } [a, b] \right\}$$

Lemme Toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$.

Démonstration Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{R})$. Considérons une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$ adaptée à f . Soit $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. La fonction f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$ et admet une limite finie à droite en x_i et une limite finie à gauche en x_{i+1} . Ainsi, $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ est prolongeable en une fonction continue sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$. Ce prolongement est alors borné sur $[x_i, x_{i+1}]$ d'après le théorème des bornes atteintes (c'est donc aussi le cas de $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$). Soit donc $M_i \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x \in]x_i, x_{i+1}[, \quad |f(x)| \leq M_i$$

et posons :

$$M := \max(\{M_i \mid i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\} \cup \{|f(x_i)| \mid i \in \llbracket 0, n \rrbracket\}) \in \mathbb{R}_+$$

Alors, M est un majorant de $|f|$ sur $[a, b]$ donc f est bornée sur $[a, b]$. ■

Proposition Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{R})$. Alors :

- ★ $E_-(f)$ admet une borne supérieure ;
- ★ $E_+(f)$ admet une borne inférieure ;
- ★ $\sup(E_-(f)) = \inf(E_+(f))$.

Démonstration ★ Les deux ensembles $E_+(f)$ et $E_-(f)$ sont des parties non vides de \mathbb{R} . En effet, on sait que f est bornée sur $[a, b]$ d'après le lemme précédent donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, on ait $|f(x)| \leq M$. L'ensemble $E_+(f)$ contient donc $M(b-a)$. En effet, la fonction $\varphi_M : x \mapsto M$ est en escalier sur $[a, b]$ telle que $\varphi_M \geq f$ et $\int_{[a,b]} \varphi = M(b-a)$. De même, $E_-(f)$ contient $-M(b-a)$.

- ★ Montrons que l'ensemble $E_-(f)$ est majoré. Soit $x \in E_-(f)$. Il existe $\varphi \in \mathcal{E}(a, b)$ tel que $\varphi \leq f$ sur $[a, b]$ et $x = \int_{[a,b]} \varphi$. Par définition de M , on a $\varphi \leq f \leq M$ sur $[a, b]$ donc (par croissance de l'intégrale pour les fonctions en escalier φ et $x \mapsto M$ sur $[a, b]$) :

$$\int_{[a,b]} \varphi \leq \int_{[a,b]} M \quad \text{c'est-à-dire} \quad x \leq M(b-a)$$

Ainsi, l'ensemble $E_-(f)$ est majorée par $M(b-a)$. On montre de la même façon que $E_+(f)$ est minoré (par $-M(b-a)$).

La propriété de la borne supérieure nous donne donc les deux premiers points de la proposition.

- ★ Le même raisonnement que celui mené au point précédent permet d'obtenir que :

$$\forall (x, y) \in E_-(f) \times E_+(f), \quad x \leq y$$

donc $\sup(E_-(f)) \leq \inf(E_+(f))$. Il reste à démontrer l'autre inégalité. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\mathcal{E}(a, b)$ est dense dans $\mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{R})$, il existe $\varphi, \psi \in \mathcal{E}(a, b)$ tels que l'on ait les inégalités suivantes sur $[a, b]$:

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \psi - \varphi \leq \frac{1}{n(b-a)}$$

Par croissance et linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escaliers, on a :

$$0 \leq \int_{[a,b]} \psi - \int_{[a,b]} \varphi \leq \frac{1}{n}$$

Or :

$$\int_{[a,b]} \psi \geq \inf(E_+(f)) \quad \text{et} \quad \int_{[a,b]} \varphi \leq \sup(E_-(f))$$

donc :

$$\inf(E_+(f)) - \sup(E_-(f)) \leq \frac{1}{n}$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient, en faisant tendre n vers $+\infty$, la deuxième inégalité. ■

On peut désormais définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$.

Définition (intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment) Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{R})$. On appelle intégrale de f sur le segment $[a, b]$, notée :

$$\int_{[a,b]} f, \quad \int_a^b f \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(t) dt,$$

la quantité $\sup(E_-(f))$ (ou $\inf(E_+(f))$).

Remarques :

- ★ Soit $f \in \mathcal{E}(a, b)$. Alors il est clair que $\sup(E_-(f)) = \int_{[a,b]} f$. Dans ce cas, les deux définitions de l'intégrale coïncident donc.
- ★ *Interprétation géométrique* : l'intégrale de $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{R})$ a été définie (par exemple) comme $\int_{[a,b]} f = \sup(E_-(f))$. L'idée est donc d'approcher le graphe par une fonction en escalier tout en restant en-dessous du point de vue des courbes. Cela revient à approcher l'aire sous la courbe représentative de f , par défaut, par des rectangles.

Définition (valeur moyenne d'une fonction continue par morceaux) Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{R})$ (ici, $a < b$). On appelle valeur moyenne de f sur le segment $[a, b]$ le nombre réel suivant :

$$\langle f \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

Remarques.

- ★ *Interprétation géométrique* : cette valeur moyenne $\langle f \rangle$ représente la largeur du rectangle de base le segment $[a, b]$ (i.e. de longueur $b - a$) dont l'aire est égale à $\int_a^b f(t) dt$.
- ★ Si m et M désignent les minimum et maximum de f sur $[a, b]$, alors on a les inégalités :

$$m \leq \langle f \rangle \leq M$$

4) Propriétés de l'intégrale

On étend, pour les fonctions continues par morceaux, les propriétés de l'intégrale vues précédemment pour les fonctions en escalier.

Proposition (propriétés de l'intégrale pour les fonctions continues par morceaux)
 Soient $f, g \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On dispose des propriétés suivantes.

- ★ **Linéarité de l'intégrale** :

$$\int_{[a,b]} (f + \lambda g) = \int_{[a,b]} f + \lambda \int_{[a,b]} g$$

- ★ **Relation de Chasles** : pour tout $c \in [a, b]$, on a $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, c], \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_{\text{pm}}([c, b], \mathbb{R})$ et

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$$

- ★ **Positivité de l'intégrale** : si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$
- ★ **Croissance de l'intégrale** : si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$
- ★ **Inégalité triangulaire** : on a $|f| \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{R})$ et $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$

Démonstration ★ Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Par densité des fonctions en escalier sur $[a, b]$ dans $\mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{R})$, il existe $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{E}(a, b)$ tels que :

$$\varphi_1 \leq f \leq \psi_1, \quad \varphi_2 \leq g \leq \psi_2, \quad \psi_1 - \varphi_1 \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \psi_2 - \varphi_2 \leq \frac{1}{n}$$

Par définition de l'intégrale des fonctions continues par morceaux f, g et $f + \lambda g$, on a :

$$\inf(E_+(f + \lambda g)) = \int_{[a,b]} (f + \lambda g) \leq \int_{[a,b]} (\psi_1 + \lambda \psi_2) \quad \text{car} \quad \int_{[a,b]} (\psi_1 + \lambda \psi_2) \in E_+(f + \lambda g)$$

tandis que (puisque $\lambda \geq 0$) :

$$\sup(E_-(f)) + \lambda \sup(E_-(g)) = \int_{[a,b]} f + \lambda \int_{[a,b]} g \geq \int_{[a,b]} \varphi_1 + \lambda \int_{[a,b]} \varphi_2$$

Ensuite, par croissance et linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier, on a :

$$\begin{aligned} \int_{[a,b]} (f + \lambda g) - \left(\int_{[a,b]} f + \lambda \int_{[a,b]} g \right) &\leq \int_{[a,b]} (\psi_1 + \lambda \psi_2) - \left(\int_{[a,b]} \varphi_1 + \lambda \int_{[a,b]} \varphi_2 \right) \\ &= \int_{[a,b]} (\psi_1 - \varphi_1) + \lambda \int_{[a,b]} (\psi_2 - \varphi_2) \\ &\leq (b - a) \frac{\lambda + 1}{n} \end{aligned}$$

De la même manière :

$$\int_{[a,b]} (f + \lambda g) - \left(\int_{[a,b]} f + \lambda \int_{[a,b]} g \right) \geq \int_{[a,b]} (\varphi_1 + \lambda \varphi_2) - \left(\int_{[a,b]} \psi_1 + \lambda \int_{[a,b]} \psi_2 \right) \leq (a-b) \frac{\lambda+1}{n}$$

On obtient le résultat souhaité en faisant tendre n vers $+\infty$. On obtient la même conclusion si $\lambda < 0$.

- ★ Le raisonnement est analogue à celui pour la linéarité de l'intégrale.
- ★ La fonction nulle sur $[a, b]$ est une fonction en escalier minorant f (puisque f est à valeurs positives). Cette fonction appartient donc à $E_-(f)$. Ainsi :

$$\int_{[a,b]} f = \sup(E_-(f)) \geq \int_{[a,b]} 0 = 0$$

- ★ Par hypothèse, la fonction $g - f$ est continue par morceaux sur $[a, b]$ et elle est à valeurs positives. On a donc (d'après la propriété de positivité de l'intégrale) :

$$\int_{[a,b]} (g - f) \geq 0$$

d'où l'on tire l'inégalité souhaitée par linéarité de l'intégrale.

- ★ On a $f \leq |f|$ et $-f \leq |f|$ donc (par croissance et linéarité de l'intégrale) :

$$\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} |f| \quad \text{et} \quad - \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} |f|$$

c'est-à-dire :

$$- \int_{[a,b]} |f| \leq \int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} |f|$$

d'où l'on tire l'inégalité annoncée. ■

Proposition (théorème de nullité de l'intégrale) Soit $f \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ (où ici $a < b$) une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

- ★ Si $\int_{[a,b]} f = 0$. Alors $f = 0_{\mathbb{R}^{[a,b]}}$.
- ★ Si $f \neq 0_{\mathbb{R}^{[a,b]}}$, alors $\int_{[a,b]} f > 0$.

Démonstration Le deuxième point est la forme contraposée du premier. Montrons le premier point en raisonnant par l'absurde : on suppose que $\int_{[a,b]} f = 0$ et que $f \neq 0_{\mathbb{R}^{[a,b]}}$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) > 0$ (puisque f est supposée positive). Par continuité de f au point c , il existe $\alpha, \beta \in [a, b]$ tels que $\alpha < \beta$, $c \in [\alpha, \beta]$ et $f \geq \frac{f(c)}{2}$ sur le segment $[\alpha, \beta]$. Par positivité puis par croissance de l'intégrale, on a :

$$\int_{[a,b]} f = \underbrace{\int_{[a,\alpha]} f}_{\geq 0} + \int_{[\alpha,\beta]} f + \underbrace{\int_{[\beta,b]} f}_{\geq 0} \geq \int_{[\alpha,\beta]} \frac{f(c)}{2} = (\beta - \alpha) \frac{f(c)}{2} > 0, \quad \blacksquare$$

ce qui est absurde.

Remarques : ce théorème est faux si on enlève l'une des deux hypothèses.

- ★ La fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Z}}$ est discontinue positive sur $[0, 1]$ d'intégrale nulle.
- ★ La fonction identité est d'intégrale nulle sur $[-1, 1]$.

5) Notation $\int_b^a f$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et $f, g \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{R})$. On pose :

$$\int_b^a f = -\int_a^b f$$

L'intégrale, dans ce nouveau cadre, vérifie les mêmes propriétés mais il faut faire attention aux signes des inégalités.

★ Si $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_b^a f \leq 0$.

★ Si $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors $\int_b^a f \geq \int_b^a g$.

★ De plus :

$$\left| \int_b^a f \right| \leq \int_a^b |f|$$

et, si $\alpha, \beta \in [a, b]$, alors :

$$\left| \int_\alpha^\beta f \right| \leq \int_{\min(\alpha, \beta)}^{\max(\alpha, \beta)} |f|$$

IV – Intégrales et primitives

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide et $f \in \mathbb{R}^I$.

On rappelle que, si $f \in \mathbb{R}^I$, alors on appelle *primitive* de f sur I toute fonction $F \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ telle que $F' = f$ sur I .

1) Existence de primitive

Le théorème fondamental de l'Analyse, qui fait le lien entre la notion de primitive et le calcul d'intégrale, assure l'existence de primitives pour une fonction continue sur un intervalle.

Théorème (fondamental de l'Analyse) Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

★ Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction :

$$F : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_a^x f(t) dt \end{cases}$$

est dérivable sur I de dérivée f .

★ La fonction F est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a .

★ En particulier, f admet des primitives sur I .

Démonstration ★ Tout d'abord, la fonction F est bien définie car, pour tout $x \in I$, la fonction f est continue (par morceaux) sur le segment d'extrémités a et x .

★ Soit $x_0 \in I$. Montrons que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$. On veut donc montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x \in I \setminus \{x_0\}, |x - x_0| \leq \delta_\varepsilon \implies \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \varepsilon$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $x \in I \setminus \{x_0\}$. Alors :

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt$$

d'après la relation de Chasles. Comme f est continue en x_0 , il existe $\delta_\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall t \in I, |t - x_0| \leq \delta_\varepsilon \implies |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$ tel que $|x - x_0| \leq \delta_\varepsilon$, on a alors :

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt - f(x_0) \right| \\ &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt - \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(x_0) dt \right| \\ &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \int_{[\min(x, x_0), \max(x, x_0)]} |f(t) - f(x_0)| dt \quad (\text{inégalité triangulaire}) \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \int_{[\min(x, x_0), \max(x, x_0)]} \varepsilon dt \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

Ceci montre que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$. Autrement dit, F est dérivable au point x_0 et on a l'égalité $F'(x_0) = f(x_0)$. Finalement, la fonction F est dérivable sur I de dérivée f . Remarquons de plus que la fonction F s'annule en a .

- ★ Si F et G sont deux primitives de f sur I s'annulant en a . Alors les fonctions F et G sont dérivables sur I , de dérivée f . Donc $F - G$ est dérivable sur I et :

$$(F - G)' = f - f = 0$$

Comme I est un intervalle, la fonction $F - G$ est constante sur I . Or $F(a) = G(a) = 0$ donc $(F - G)(a) = 0$. On en déduit que $F = G$. ■

Corollaire (théorème fondamental du calcul intégral) Soient $a, b \in I$ tels que $a \leq b$ et f une fonction continue sur I . Pour toute primitive F de f sur I , on a l'égalité :

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \stackrel{\text{noté}}{=} \left[F(t) \right]_a^b$$

Démonstration La fonction $G : x \mapsto F(x) - F(a)$ est une primitive de f sur I qui s'annule en a . Par unicité de cette primitive, on a d'après le théorème précédent :

$$\forall x \in I, \quad F(x) - F(a) = \int_a^x f(t) dt,$$

d'où le résultat. ■

Conséquences :

- ★ Les primitives de f sont exactement les fonctions de la forme :

$$x \in I \mapsto \int_a^x f(t) dt + C \quad (\text{où } C \in \mathbb{R})$$

- ★ Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur I , alors :

$$\forall a, b \in I, \quad f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$$

2) Rappels : quelques méthodes de calcul intégral

On rappelle ici les théorèmes d'intégration par partie et de changement de variable. Ceux-ci ont déjà été démontrés.

(a) Intégration par parties

Théorème (d'intégration par parties) Soient $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. Pour tous $a, b \in I$, on a :

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

où :

$$[u(t)v(t)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

Exemple Déterminons une primitive de la fonction arcsin, qui est continue sur l'intervalle $[-1, 1]$. La primitive F de arcsin sur l'intervalle $[-1, 1]$ s'annulant en 0 est telle que :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad F(x) = \int_0^x \arcsin(t) dt$$

Soit $x \in]-1, 1[$. Les fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \arcsin(t)$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[\min(0, x), \max(0, x)]$ de dérivées respectivement $t \mapsto 1$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. On peut donc intégrer par parties sur ce segment et on a :

$$F(x) = [t \arcsin(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = x \arcsin(x) - \sqrt{1-x^2} + 1$$

(b) Changement de variable

Théorème (de changement de variable) Soient $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}(\varphi(I), \mathbb{R})$. Pour tous $a, b \in I$, on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt$$

On dit qu'on a effectué le changement de variable $x = \varphi(t)$.

Exemple Calculer l'intégrale $\int_0^{\ln(\sqrt{3})} \frac{1}{2 \operatorname{ch}(x)} dx$ en posant $t = e^x$.

Corollaire Soit $f \in \mathcal{C}([-a, a], \mathbb{R})$ où $a > 0$.

★ Si f est paire sur $[-a, a]$, alors :

$$\int_{-a}^0 f(t) dt = \int_0^a f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$$

★ Si f est impaire sur $[-a, a]$, alors :

$$\int_{-a}^0 f(t) dt = - \int_0^a f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_{-a}^a f(t) dt = 0$$

★ Si f est une fonction continue et périodique sur \mathbb{R} de période $T > 0$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{nT} f(t) dt = n \int_0^T f(t) dt$$

Démonstration Il suffit d'effectuer le changement de variable $x = -t$ dans l'intégrale $\int_{-a}^0 f(t) dt$. ■

Exemple On a $\int_{-1}^1 x|x| dx = 0$.

V – Méthode des rectangles à gauche

Le théorème ci-dessous est une version séquentielle de l'approximation de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux par des intégrales de fonctions en escalier.

Théorème (sur les sommes de Riemann) Soit $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{R})$.

★ On a :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$$

★ Si f est de plus lipschitzienne sur $[a, b]$, on a :

$$\int_a^b f(t) dt \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Interprétation géométrique : plus n sera grand et plus les rectangles seront « fins » et donc mieux l'intégrale sera approchée par la somme (appelée somme de Riemann) apparaissant dans la proposition.

Démonstration (pour f lipschitzienne) Conformément au programme, on démontrera ce résultat pour une fonction f lipschitzienne sur $[a, b]$. Par hypothèse, il existe donc $M > 0$ tel que :

$$\forall x, y \in [a, b], \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$. D'après la relation de Chasles, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) dt \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(t) - f(x_k)) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)| dt \end{aligned}$$

d'après l'inégalité triangulaire pour les sommes puis pour les intégrales. Ainsi :

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} M(t - x_k) dt$$

en utilisant l'hypothèse faite sur f (elle est M -lipschitzienne) et la croissance de l'intégrale. Ensuite, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} M(t - x_k) dt &= \left[M \frac{(t - x_k)^2}{2} \right]_{x_k}^{x_{k+1}} = M \frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2} \\ &= M \frac{(b-a)^2}{2n^2} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2n},$$

ce qu'il fallait établir. ■

Remarque : si $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{R})$, alors on a aussi

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt \quad (\text{méthode des rectangles à droite})$$

Exemple ★ Par continuité de $t \mapsto \cos(\pi t)$ sur $[0, 1]$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{k}{n} \pi\right) = \int_0^1 \cos(t\pi) dt = 0$$

★ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^2 + k^2}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

donc $(u_n)_{n \geq 1}$ est la suite des sommes de Riemann de la fonction \arctan qui est continue sur l'intervalle $[0, 1]$. On en déduit que cette suite converge de limite :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 \arctan(t) dt = \frac{\pi}{4}$$

VI – Formules de Taylor

Dans toute cette section, I désigne un intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide.

Nous avons rencontré deux formules de Taylor : celle concernant les polynômes et la formule de Taylor-Young. Le point commun de celles-ci est qu'elles permettent d'exprimer (ou d'approximer) la valeur d'une fonction en un point a à partir du polynôme de Taylor de la fonction en ce point, à savoir

$$T_n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$$

et d'un éventuel reste négligeable.

Nous donnons ici une nouvelle formule de Taylor avec un reste explicite et étudions certaines conséquences de ce résultat.

1) Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème (formule de Taylor avec reste intégral) Soient $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in I$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$. Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Démonstration On utilise un raisonnement par récurrence. Soit $a, b \in I$. Pour tout entier naturel n , on considère la proposition :

$$\mathcal{P}_n : \ll \forall f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R}), f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \gg$$

★ Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur I , on sait d'après le théorème fondamental de l'Analyse que :

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt$$

L'égalité est donc vraie au rang 0.

★ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la proposition \mathcal{P}_n soit vraie et soit $f \in \mathcal{C}^{n+2}(I, \mathbb{R})$. Alors $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ donc l'hypothèse de récurrence s'applique. On a donc l'égalité :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Les fonctions $f^{(n+1)}$ et $t \mapsto -\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur I (car f est de classe \mathcal{C}^{n+2} sur I par hypothèse et car la deuxième fonction est polynomiale donc de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}) de dérivées respectives $f^{(n+2)}$ et $t \mapsto \frac{(b-t)^n}{n!}$. D'après le théorème d'intégration par parties, on a l'égalité :

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt &= \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt \end{aligned}$$

On obtient alors bien l'égalité :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) dt$$

donc la proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Le théorème est donc établi par principe de récurrence simple. ■

Exemple La fonction exponentielle est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} donc on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à cette fonction et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt$$

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Démonstration Soit $x \in \mathbb{R}_+$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral écrite à l'ordre 2, on a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} e^t dt}_{\geq 0} \geq 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

l'intégrale étant positive par positivité de l'intégrande (et car les bornes sont *dans le bon sens*). ■

2) Applications

(a) Inégalité de Taylor-Lagrange

La proposition suivante est une conséquence du théorème de Taylor avec reste intégral.

Proposition (inégalité de Taylor-Lagrange) Soient $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in I$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$. Alors :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in [\min(a,b), \max(a,b)]} |f^{(n+1)}(x)|$$

Démonstration La fonction f étant de classe \mathcal{C}^{n+1} sur I , la fonction $f^{(n+1)}$ est continue sur I et donc en particulier sur le segment $[\min(a,b), \max(a,b)]$, d'où l'existence (dans \mathbb{R}) du maximum ci-dessus. D'après la formule de Taylor avec reste intégral (qui s'applique puisque les hypothèses sont réunies), on a si $a \leq b$:

$$\begin{aligned} \left| f(b) - \sum_{k=0}^n \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| &= \left| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \leq \int_a^b \left| \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right| dt \\ &\leq \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} dt \\ &= \max_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Le raisonnement est analogue si $a > b$. ■

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x$$

Démonstration Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \max(1, e^x)$$

et donc la suite $\left(\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite e^x . En effet, $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées. ■

(b) Formule de Taylor-Young

Théorème (de Taylor-Young) Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^n sur un intervalle I et soit $a \in I$. Alors :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Démonstration (en supposant que f est de classe \mathcal{C}^{n+1}) En effet, l'inégalité de Taylor-Lagrange nous donne :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \mathcal{O}((x-a)^{n+1}),$$

ce qui implique l'estimation annoncée. ■

VII – Brève extension de l'intégrale aux fonctions à valeurs complexes

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et $f : \mathbb{C}^{[a,b]}$ une fonction.

Définition ★ On dit que f est continue par morceaux sur $[a, b]$ si les fonctions $\operatorname{Re}(f) \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ et $\operatorname{Im}(f) \in \mathbb{R}^{[a,b]}$ le sont.

★ Si $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}([a, b], \mathbb{C})$, alors on définit alors l'intégrale de f sur le segment $[a, b]$ par :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$$

Toutes les propriétés vues dans ce chapitre se généralisent aux intégrales de fonctions continues par morceaux à valeurs complexes sauf les propriétés de positivité et de croissance de l'intégrale. Par contre, l'inégalité triangulaire reste vérifiée (on remplace simplement la valeur absolue par le module), tout comme les formules de Taylor.

Exemple $\left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{1+t} dt \right| \leq 2\pi$