

APPLICATIONS LINÉAIRES (GÉNÉRALITÉS)

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Généralités | 2 |
| 1.1 | Définitions | 2 |
| 1.2 | Opérations sur les applications linéaires | 4 |
| 2 | Noyau et image d'une application linéaire | 6 |
| 2.1 | Préliminaire : images directe et réciproque | 6 |
| 2.2 | Image et noyau d'une application linéaire | 7 |
| 2.2.1 | Définitions | 7 |
| 2.2.2 | Propriétés | 7 |
| 3 | Il en faut peu pour connaître une application linéaire | 9 |
| 3.1 | Préliminaire : formes linéaires coordonnées | 9 |
| 3.2 | Détermination d'une application linéaire | 9 |
| 3.3 | Image d'une base et TRUC-jektivité | 10 |
| 3.4 | Espaces isomorphes | 12 |
| 3.5 | Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ | 13 |
| 3.6 | Détermination d'une application linéaire sur une somme directe | 14 |
| 4 | Rang d'une application linéaire | 15 |
| 4.1 | Définition | 15 |
| 4.2 | Propriétés du rang | 15 |
| 4.3 | Rang d'une composition | 16 |
| 4.4 | Le théorème du rang | 17 |
| 5 | Deux familles d'endomorphismes particuliers de E | 18 |
| 5.1 | Projecteur (ou projection) de E | 18 |
| 5.1.1 | Projecteur (ou projection) sur F parallèlement à G | 18 |
| 5.1.2 | Propriétés | 18 |
| 5.1.3 | Projecteur de E : définition générale | 19 |
| 5.2 | Symétrie (vectorielle) de E | 20 |
| 5.2.1 | Symétrie (vectorielle) par rapport à F parallèlement à G | 20 |
| 5.2.2 | Propriétés | 20 |
| 5.2.3 | Symétrie de E : définition générale | 21 |
| 6 | Formes linéaires et hyperplans | 22 |
| 6.1 | Formes linéaires | 22 |
| 6.2 | Hyperplans | 23 |

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désigne l'un des deux corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} et E, F et G désignent des \mathbb{K} -espaces vectoriels (de dimensions finies ou infinies).

I – Généralités

1) Définitions

Définition (application linéaire) Soit $f \in F^E$. L'application f est dite *linéaire* si :
 (Al)₁ $\forall x, y \in E, f(x + y) = f(x) + f(y)$ (on dit que f préserve l'addition des vecteurs) ;
 (Al)₂ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x)$ (on dit que f préserve la multiplication par les scalaires).

Exemple ★ L'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 3x \end{cases}$ est linéaire.

Démonstration Pour tous $\lambda, x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x + y) = 3(x + y) = 3x + 3y = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(\lambda x) = 3(\lambda x) = \lambda(3x) = \lambda f(x),$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

★ L'application identité $\text{Id}_E : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{cases}$ est linéaire.

Démonstration Pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$, on a :

$$\text{Id}_E(x + y) = x + y = \text{Id}_E(x) + \text{Id}_E(y) \quad \text{et} \quad \text{Id}_E(\lambda x) = \lambda x = \lambda \text{Id}_E(x),$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

★ L'application nulle $\theta : \begin{cases} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{cases}$ est linéaire.

Démonstration Pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$, on a :

$$\theta(x + y) = 0_F = 0_F + 0_F = \theta(x) + \theta(y) \quad \text{et} \quad \theta(\lambda x) = 0_F = \lambda \cdot 0_F = \lambda \theta(x),$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

Proposition Soit $f \in F^E$ une application linéaire. Alors $f(0_E) = 0_F$.

Démonstration Comme $0_E = 0_E + 0_E$, on a d'après la propriété (Al)₁ :

$$f(0_E) = f(0_E + 0_E) = f(0_E) + f(0_E)$$

Comme $f(0_E)$ est inversible dans le groupe $(F, +)$, on en déduit bien que $f(0_E) = 0_F$. ■

Remarque : par contraposition, si $f \in F^E$ est une application telle que $f(0_E) \neq 0_F$, alors f n'est pas linéaire.

Exemple L'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x - y + z + 2 \end{cases}$ n'est pas linéaire car $f(0_{\mathbb{R}^3}) = 2 \neq 0_{\mathbb{R}}$.

Remarque : par contre, la réciproque est fautive (il est possible que $f(0_E) = 0_F$ sans que f ne soit linéaire).

Exemple L'application $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$ est telle que $f(0) = 0$ mais elle n'est pas linéaire. En effet, on a par exemple $f(2) = 4$ et $f(1) + f(1) = 2 \neq f(4)$.

En pratique, on peut unifier les deux points de la définition pour montrer qu'une application est linéaire.

Proposition Une application $f \in F^E$ est linéaire si et seulement si :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \quad f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) \quad (*)$$

On dit que f préserve les combinaisons linéaires.

Démonstration (\implies) Supposons que f est linéaire (i.e. qu'elle vérifie les propriétés (Al)₁ et (Al)₂). Pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$, on a :

$$f(x + \lambda y) \stackrel{(Al)_1}{=} f(x) + f(\lambda y) \stackrel{(Al)_2}{=} f(x) + \lambda f(y)$$

Donc f vérifie la propriété (*).

(\impliedby) Réciproquement, supposons que f vérifie (*). En choisissant $\lambda = 1$ dans (*), on obtient la propriété (Al)₁. D'après la démonstration de la proposition 1, on a $f(0_E) = 0_F$. En choisissant ensuite $x = 0_E$ dans (*), on obtient la propriété (Al)₂. L'application f est donc linéaire. ■

Exemple ★ L'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - y, x + y) \end{cases}$ est linéaire.

Démonstration Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $Y = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\begin{aligned} f(X + \lambda Y) &= f((x, y) + \lambda(a, b)) = f((x + \lambda a, y + \lambda b)) \\ &= (x + \lambda a - (y + \lambda b), x + \lambda a + y + \lambda b) \\ &= (x - y + \lambda(a - b), x + y + \lambda(a + b)) \\ &= (x - y, x + y) + \lambda(a - b, a + b) \\ &= f(X) + \lambda f(Y) \end{aligned}$$

Ainsi, f est une application linéaire. ■

★ L'application $\tau : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(4) \end{cases}$ est linéaire.

Démonstration Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Alors :

$$\begin{aligned} \tau(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q)(4) = P(4) + \lambda Q(4) \quad (\text{par définition de } P + \lambda Q) \\ &= \tau(P) + \lambda \tau(Q) \end{aligned}$$

Donc τ est une application linéaire. ■

★ L'application $D : \begin{cases} \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{cases}$ est linéaire.

Démonstration Ceci est une simple réécriture de la propriété de linéarité de la dérivation. ■

★ L'application $t : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^T \end{cases}$ est linéaire.

Démonstration Ceci est une simple réécriture de la propriété de linéarité de la transposition. ■

Remarque : par une récurrence immédiate, on peut montrer que si $f \in F^E$ est linéaire, alors pour toute suite presque nulle $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ et pour toute famille $(x_i)_{i \in I} \in E^I$, on a :

$$f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i)$$

Terminologie/notations :

★ On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F :

$$\mathcal{L}(E, F) = \{f \in F^E \mid f \text{ linéaire}\}$$

Exemple On a $\tau \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X], \mathbb{R})$.

★ Lorsque $E = F$, on parle d'*endomorphismes de E* , l'ensemble associé est noté $\mathcal{L}(E)$ (au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$).

Exemple On a $t \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et $D \in \mathcal{L}(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$.

★ Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective, on dit que f est un *isomorphisme de E vers F* . On note $\text{GL}(E, F)$ l'ensemble correspondant.

★ Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est bijective, on dit que f est un *automorphisme de E* , l'ensemble correspondant est alors noté $\text{GL}(E)$. On l'appelle le *groupe linéaire de E*

Exemple On a $t \in \text{GL}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ car t est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et car $t \circ c = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

-  **Exercice** 1. Déterminer les endomorphismes de \mathbb{R} (autrement dit, expliciter $\mathcal{L}(\mathbb{R})$).
2. De même, déterminer $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

2) Opérations sur les applications linéaires

On peut naturellement munir $\mathcal{L}(E, F)$ d'une addition et d'une multiplication externe. Plus précisément, pour tous $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, l'application $f + \lambda g$ est définie par :

$$\forall x \in E, \quad (f + \lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x) \in F$$

et on vérifie facilement que $f + \lambda g \in \mathcal{L}(E, F)$.

Proposition L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Démonstration Il suffit de vérifier que $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel F^E . Or l'application nulle (que l'on notera désormais $0_{\mathcal{L}(E, F)}$) est linéaire, et $\mathcal{L}(E, F)$ est stable par combinaisons linéaires. ■

On dispose aussi des propriétés de stabilité suivantes.

Proposition (composition, réciproque) Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

- ★ $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$;
- ★ et si f est bijective de E sur F , alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Démonstration ★ Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x + \lambda y) &= g(f(x + \lambda y)) = g(f(x) + \lambda f(y)) && \text{(car } f \text{ est linéaire)} \\ &= g(f(x)) + \lambda g(f(y)) && \text{(car } g \text{ est linéaire)} \\ &= (g \circ f)(x) + \lambda (g \circ f)(y) \end{aligned}$$

Ainsi, $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.

- ★ Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $X, Y \in F$. Comme f est bijective de E sur F , il existe un unique couple $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = X$ et $f(y) = Y$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f^{-1}(X + \lambda Y) &= f^{-1}(f(x) + \lambda f(y)) = f^{-1}(f(x + \lambda y)) && \text{(car } f \text{ est linéaire)} \\ &= (f^{-1} \circ f)(x + \lambda y) \\ &= \text{Id}_E(x + \lambda y) \\ &= x + \lambda y \\ &= f^{-1}(X) + \lambda f^{-1}(Y) \end{aligned}$$

Donc $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$. ■

Corollaire Le triplet $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau (en général non commutatif).

Démonstration On vérifie facilement que $\mathcal{L}(E)$ est un sous-anneau de $(E^E, +, \circ)$, *i.e.* que :

- ★ $(\mathcal{L}(E), +)$ est un sous-groupe de $(E^E, +)$;
- ★ $\mathcal{L}(E)$ est stable pour la composition des applications ;
- ★ $\text{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$. ■

Proposition (bilinéarité de la composition) L'application :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, G) \\ (f, g) & \longmapsto & g \circ f \end{cases}$$

est bilinéaire, *i.e.* :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F), \forall g \in \mathcal{L}(F, G), \quad g \circ (f_1 + \lambda f_2) = g \circ f_1 + \lambda g \circ f_2 \quad (*)$$

et :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall f \in \mathcal{L}(E, F), \forall g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F, G), \quad (g_1 + \lambda g_2) \circ f = g_1 \circ f + \lambda g_2 \circ f \quad (**)$$

Démonstration Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F, G)$.

- ★ Soit $x \in E$. On a :

$$\begin{aligned} (g \circ (f_1 + \lambda f_2))(x) &= g((f_1 + \lambda f_2)(x)) = g(f_1(x) + \lambda f_2(x)) \\ &= g(f_1(x)) + \lambda g(f_2(x)) && \text{(car } g \in \mathcal{L}(F, G)) \\ &= (g \circ f_1)(x) + \lambda (g \circ f_2)(x) \\ &= (g \circ f_1 + \lambda g \circ f_2)(x), \end{aligned}$$

ce qui prouve l'égalité (*).

- ★ De même, pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} ((g_1 + \lambda g_2) \circ f)(x) &= (g_1 + \lambda g_2)(f(x)) = g_1(f(x)) + \lambda g_2(f(x)) \\ &= (g_1 \circ f)(x) + \lambda (g_2 \circ f)(x) \\ &= (g_1 \circ f + \lambda g_2 \circ f)(x), \end{aligned}$$

d'où l'égalité (**). ■

Définition (itérées d'un endomorphisme) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit la suite des itérées de u par récurrence de la manière suivante :

$$\star u^0 = \text{Id}_E;$$

$$\star \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}, u^{k+1} = u^k \circ u.$$

Si $u \in \text{GL}(E)$, alors on définit u^k pour $k \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}$ de la manière suivante :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}, \quad u^k = (u^{-1})^{-k},$$

où u^{-1} est la bijection réciproque de u .

Par exemple, $u^3 = u \circ u \circ u$.

Notation : si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, l'application composée $u \circ v$ se note aussi uv .

Exemple Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, l'homothétie de rapport λ :

$$h_\lambda : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda x \end{cases}$$

est un automorphisme de E et :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad (h_\lambda)^k = h_{\lambda^k}$$

II – Noyau et image d'une application linéaire

1) Préliminaire : images directe et réciproque

Une application préserve les combinaisons linéaires. Elle préserve également la structure d'espace vectoriel.

On rappelle que, si E' et F' sont des sous-ensembles de E et F respectivement, alors :

— l'image directe de E' par f est :

$$f(E') = \{y \in F \mid \exists x \in E', y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in E'\}$$

— l'image réciproque de F' par f est :

$$f^{-1}(F') = \{x \in E \mid f(x) \in F'\}$$

Proposition (image directe/réciproque d'un sous-espace vectoriel) Soient E' un sous-espace vectoriel de E et F' un sous-espace vectoriel de F . Alors :

$\star f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F ;

$\star f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E .

Démonstration \star Tout d'abord, on a clairement $f(E') \subset F$.

— Comme E' est un sous-espace vectoriel de E , on a $0_E \in E'$ et donc (par linéarité de f),

$$0_F = f(0_E) \in f(E')$$

- Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $X, Y \in f(E')$. Il existe $x, y \in E'$ tel que $f(x) = X$ et $f(y) = Y$. La linéarité de f nous donne alors :

$$X + \lambda Y = f(x) + \lambda f(y) = f(x + \lambda y)$$

et comme $x + \lambda y \in E'$ (puisque E' est un sous-espace vectoriel de E), on peut conclure que $X + \lambda Y \in f(E')$.

Ainsi, $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F .

★ Il est clair que $f^{-1}(F') \subset E'$.

- On a $f(0_E) = 0_F \in F'$ (car F' est un sous-espace vectoriel de F) donc $0_E \in f^{-1}(F')$.
- Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in f^{-1}(F')$. Alors, par linéarité de f ,

$$f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y) \in F'$$

car x et y appartiennent à $f^{-1}(F')$ et car F' est un sous-espace vectoriel de F .

Ainsi, $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E . ■

Exemple L'ensemble $A = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = P(2)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Démonstration On introduit l'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) - P(2) \end{cases}$$

On vérifie alors que $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X], \mathbb{R})$. Ensuite, $A = \varphi^{-1}(\{0\})$ et $\{0\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R} , l'ensemble A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. ■

2) Image et noyau d'une application linéaire

(a) Définitions

Proposition/définition (noyau d'une application linéaire) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

★ On appelle *noyau de f* le sous-espace vectoriel de E suivant :

$$\text{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$$

★ On appelle *image de f* le sous-espace vectoriel de F suivant :

$$\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\}$$


Démonstration On a les égalités :

$$\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0_F\}) \quad \text{et} \quad \text{Im}(f) = f(E)$$

Or $\{0_F\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de F et de E respectivement donc $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels de E et de F d'après la proposition précédente. ■

Exemple ★ Le noyau de $D : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{cases}$ est $\text{Ker}(D) = \mathbb{R}_0[X]$, son image est $\mathbb{R}[X]$.

★ Le noyau de $\varepsilon_a : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(0) \end{cases}$ est $\text{Vect}(X)$, son image est \mathbb{R} .

 **Exercice** Déterminer le noyau et l'image de $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - y, x + y) \end{cases}$.

(b) Propriétés

L'intérêt du noyau et de l'image réside dans la proposition suivante.

Proposition Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

- ★ f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$;
- ★ f est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.

Démonstration ★ On raisonne par double implication.

— Supposons que f soit injective. Pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(f) &\iff f(x) = 0_F \iff f(x) = f(0_E) && \text{(car } f \text{ est linéaire)} \\ &\iff x = 0_E \end{aligned}$$

car f est surjective. On a donc bien $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.

— Supposons que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$. Soient $x, y \in E$ tel que $f(x) = f(y)$. On a alors $f(x) - f(y) = 0_F$, i.e. $f(x - y) = 0_F$ par linéarité de f . Autrement dit, $x - y \in \text{Ker}(f)$. L'hypothèse entraîne que $x - y = 0_E$, i.e. $x = y$. Ainsi, f est injective.

★ On sait que f est surjective si et seulement si $f(E) = F$, d'où le résultat puisque $\text{Im}(f) = f(E)$. ■

Exemple L'application linéaire $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & 2P - XP' \end{cases}$ n'est pas injective.

Démonstration Le calcul du noyau montre que $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(X) \neq \{0_{\mathbb{R}_2[X]}\}$. ■

Le résultat suivant permet de calculer en pratique l'image d'une application linéaire, dès lors que l'on dispose d'une famille génératrice de E .

Proposition (calcul de $\text{Im}(f)$) Soient $(e_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_i))_{i \in I}$$

Démonstration Soit $y \in F$. Alors :

$$\begin{aligned} y \in \text{Im}(f) &\iff \exists x \in E, y = f(x) \\ &\iff \exists (\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)}, y = f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i\right) \\ &\iff \exists (\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)}, y = \sum_{i \in I} \lambda_i f(e_i) && \text{(car } f \text{ est linéaire)} \\ &\iff y \in \text{Vect}(f(e_i))_{i \in I}, \end{aligned}$$

d'où l'égalité annoncée. ■

Exemple L'application linéaire $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y, y - z) \end{cases}$ est surjective.

Démonstration Comme $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une base de \mathbb{R}^3 , on a :

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)) = \text{Vect}((2, 0), (1, 1), (0, -1)) \\ &= \text{Vect}((1, 0), (1, 1), (0, 1)) \\ &= \text{Vect}((1, 0), (0, 1)) && \text{(car } (1, 1) = (1, 0) + (0, 1)) \\ &= \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

donc l'application f est surjective. ■

III – Il en faut peu pour connaître une application linéaire

1) Préliminaire : formes linéaires coordonnées

Dans ce paragraphe, on suppose que E est muni d'une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$.

Définition (forme coordonnée) Soit $i \in I$. On appelle *forme linéaire coordonnée d'indice i* , notée e_i^* , l'application qui à tout vecteur x de E associe la coordonnée de x selon le vecteur e_i dans la base \mathcal{B} . Pour tout $x \in E$, on a donc :

$$x = \sum_{i \in I} \underbrace{e_i^*(x)}_{\in \mathbb{K}} e_i$$

On dispose des propriétés suivantes.

Proposition (propriétés de e_i^*) ★ On a :

$$\forall i, j \in I, \quad e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$$

★ Pour tout $i \in I$, on a $e_i^* \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Démonstration ★ Soit $i \in I$. On a :

$$e_i = e_i + \sum_{j \in I \setminus \{i\}} 0 \cdot e_j$$

donc, par définition de $e_i^*(e_i)$, on a bien $e_i^*(e_i) = 1$. De plus, pour tout $j \in I \setminus \{i\}$, on a :

$$e_i = e_i + 0 \cdot e_j + \sum_{k \in I \setminus \{i,j\}} 0 \cdot e_k$$

donc $e_j^*(e_i) = 0$.

★ Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in E$. Par définition des formes linéaires coordonnées, on a :

$$x + \lambda y = \sum_{i \in I} e_i^*(x + \lambda y) e_i$$

et :

$$x + \lambda y = \sum_{i \in I} e_i^*(x) e_i + \lambda \sum_{i \in I} e_i^*(y) e_i = \sum_{i \in I} (e_i^*(x) + \lambda e_i^*(y)) e_i$$

Par unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base, on peut conclure que :

$$\forall i \in I, \quad e_i^*(x + \lambda y) = e_i^*(x) + \lambda e_i^*(y),$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

2) Détermination d'une application linéaire

Théorème (détermination d'une application linéaire par l'image d'une base) Soient $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I} \in E^I$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_i)_{i \in I} \in F^I$ une famille quelconque de vecteurs de F . Alors il existe une unique application linéaire f de E vers F telle que :

$$\forall i \in I, \quad f(e_i) = f_i$$

Démonstration On raisonne par analyse-synthèse.

★ Soit $x \in E$. En notant e_i^* la forme coordonnée de E selon e_i , on a :


$$x = \sum_{i \in I} e_i^*(x) e_i$$

S'il existe $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f(e_i) = f_i$ pour tout $i \in I$, on a par linéarité de f ,

$$f(x) = f\left(\sum_{i \in I} e_i^*(x) e_i\right) = \sum_{i \in I} e_i^*(x) f(e_i) = \sum_{i \in I} e_i^*(x) f_i$$

Ainsi, si une telle application linéaire existe, alors celle-ci est uniquement déterminée.

★ Considérons l'application $f = \sum_{i \in I} e_i^* f_i : E \rightarrow F$. Cette application est linéaire car les formes coordonnées le sont. ■

 **Exercice** Soient $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (1, 1, 0)$ et $e_3 = (1, 0, 0)$. Montrer qu'il existe une unique application linéaire de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 vérifiant :

$$f(e_1) = (1, 1), \quad f(e_2) = (1, -1) \quad \text{et} \quad f(e_3) = (2, 1)$$

Déterminer l'expression de f .

3) Image d'une base et TRUC-jektivité

Proposition (lien entre injectivité/surjectivité et l'image d'une base) On suppose que E possède une base $(e_i)_{i \in I}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

- ★ f est surjective si et seulement si $(f(e_i))_{i \in I}$ est une famille génératrice de F ;
- ★ f est injective si et seulement si $(f(e_i))_{i \in I}$ est libre ;
- ★ f est un isomorphisme de E sur F si et seulement si $(f(e_i))_{i \in I}$ est une base de F .

Démonstration ★ Comme $(e_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E , on sait que :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_i))_{i \in I}$$

donc :

$$\begin{aligned} f \text{ surjective} &\iff \text{Im}(f) = F \iff \text{Vect}(f(e_i))_{i \in I} = F \\ &\iff (f(e_i))_{i \in I} \text{ est une famille génératrice de } F \end{aligned}$$

★ On raisonne par double implication.

\Rightarrow Supposons que f soit injective et montrons que $(f(e_i))_{i \in I}$ est libre. Soit $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ telle que :

$$\sum_{i \in I} \lambda_i f(e_i) = 0_F$$

Comme f est linéaire, cette égalité se réécrit :

$$f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i e_i\right) = 0_F$$

Ainsi, $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i \in \text{Ker}(f)$ et comme f est injective, on a $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0_E$. La liberté de la famille $(e_i)_{i \in I}$ permet de conclure :

$$\forall i \in I, \quad \lambda_i = 0_{\mathbb{K}},$$

ce qu'il fallait démontrer.

\Leftarrow Réciproquement, supposons que la famille $(f(e_i))_{i \in I}$ soit libre et montrons que f est injective, *i.e.* que $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$. Soit $x \in \text{Ker}(f)$. L'égalité $f(x) = 0_F$ se réécrit, par linéarité de f ,

$$f\left(\sum_{i \in I} x_i e_i\right) = \sum_{i \in I} e_i^*(x) f(e_i) = 0_F$$

La famille $(f(e_i))_{i \in I}$ est libre donc :

$$\forall i \in I, \quad e_i^*(x) = 0$$

puis :

$$x = \sum_{i \in I} e_i^*(x) e_i = \sum_{i \in I} 0 \cdot e_i = 0_E$$

Ceci montre l'inclusion $\text{Ker}(f) \subset \{0_E\}$. L'inclusion réciproque est immédiate (puisque $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E), on a bien $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$, ce qui signifie que f est injective.

★ C'est une conséquence immédiate des deux premiers points. ■

Exemple Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ une famille de scalaires deux à deux distincts. L'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ P & \longmapsto & (P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{cases}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ sur \mathbb{K}^n .

Démonstration ★ On vérifie facilement que f est linéaire.

★ Si $\mathcal{L} = (L_1, \dots, L_n)$ est la famille des polynômes de Lagrange associée à (x_1, \dots, x_n) , on sait que \mathcal{L} est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. De plus, l'image de cette base par f est la base canonique de \mathbb{K}^n car :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad L_i(x_j) = \delta_{i,j}$$

Donc f est bijective. ■

Le résultat suivant est très utile en pratique.

Corollaire (cas particulier de la dimension finie) On suppose que les espaces vectoriels E et F sont de même dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

Démonstration Posons $n = \dim(E) = \dim(F) \in \mathbb{N}^*$. La famille $f(\mathcal{B})$ (de vecteurs de F) est constituée de $n = \dim(F)$ vecteurs donc :

$$f(\mathcal{B}) \text{ est libre} \iff f(\mathcal{B}) \text{ est génératrice de } F \iff f(\mathcal{B}) \text{ est une base de } F,$$

i.e. :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

en utilisant la proposition précédente. ■

Exemple L'application $\Psi : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1)) \end{cases}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration On vérifie que Ψ est linéaire puis qu'elle est injective. Comme les espaces vectoriels $\mathbb{R}_2[X]$ et \mathbb{R}^3 sont de même dimension finie (égale à 3), l'injectivité entraîne la bijectivité de l'application d'après le corollaire. ■

Corollaire On suppose que E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $f \in \text{GL}(E)$;
- (ii) f est inversible à gauche (*i.e.* : $\exists g \in \mathcal{L}(E), g \circ f = \text{Id}_E$) ;
- (iii) f est inversible à droite (*i.e.* : $\exists g \in \mathcal{L}(E), f \circ g = \text{Id}_E$).

Démonstration ★ Montrons que (i) \iff (ii). Supposons que f soit inversible à gauche. Il existe donc $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = \text{Id}_E$. Déterminons le noyau de f . Soit $x \in \text{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0_E$ puis $g(f(x)) = g(0_E) = 0_E$ (par linéarité de f). Ainsi :

$$x = \text{Id}_E(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 0_E$$

On obtient l'inclusion $\text{Ker}(f) \subset \{0_E\}$. L'inclusion réciproque étant immédiate, il vient $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$. Ainsi, f est injective et donc bijective (car f est un endomorphisme de E , l'espace vectoriel E étant de dimension finie). Autrement dit, $f \in \text{GL}(E)$. Ceci montre que (ii) \implies (i), d'où l'équivalence annoncée (la réciproque étant immédiate).

★ Montrons que (i) \iff (iii). Supposons que f soit inversible à droite et soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ g = \text{Id}_E$. Pour tout $x \in E$, on a :

$$x = \text{Id}_E(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

donc $g(x) \in E$ est un antécédent de x par f dans E . Par conséquent, f est surjective. On conclut que f est bijective comme au point précédent.

Les assertions (i), (ii) et (iii) sont donc équivalentes. ■

4) Espaces isomorphes

Définition (espaces vectoriels isomorphes) Les espaces vectoriels E et F sont dits *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $f \in \mathcal{L}(E, F)$ de E sur F .

Exemple D'après le dernier exemple traité, les espace vectoriels $\mathbb{R}_2[X]$ et \mathbb{R}^3 sont isomorphes.

On s'intéresse aux espaces isomorphes de dimension finie.

Proposition (caractérisation des espaces isomorphes en dimension finie) ★ Si E est de dimension finie et si E et F sont isomorphes, alors F est de dimension finie et $\dim(F) = \dim(E)$.
 ★ Réciproquement, si E et F sont de même dimension finie, alors E et F sont isomorphes.

Démonstration ★ On suppose que E est de dimension finie notée $n \in \mathbb{N}^*$ et qu'il existe un isomorphisme $f \in \mathcal{L}(E, F)$ de E sur F . Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . Comme f est bijective, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F . Donc F est de dimension finie et $\dim(F) = n = \dim(E)$.

★ Réciproquement, supposons que E et F soient de même dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E et F respectivement. On sait qu'il existe une (unique) application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f(e_i) = f_i$$

Autrement dit, $f(\mathcal{B}) = \mathcal{C}$ donc l'image d'une base de E par f est une base de F . Par conséquent, f est un isomorphisme de E sur F et donc E et F sont des espaces vectoriels isomorphes. ■

Exemple Les espaces vectoriels $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$, \mathbb{K}^6 et $\mathbb{K}_5[X]$ sont deux à deux isomorphes.

Remarque : si E et F sont de dimensions finies différentes, alors il n'existe pas d'application linéaire bijective de E sur F . Par exemple :

$$\{f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}^3) \mid f \text{ bijective}\} = \emptyset$$

Le résultat précédent montre donc qu'il n'existe un et un seul \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n , à isomorphisme près.

Corollaire Si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, alors E est isomorphe à \mathbb{K}^n .

Démonstration Les espaces vectoriels E et \mathbb{K}^n sont de même dimension finie (égale à n). ■

Exemple ★ L'espace $\mathbb{K}_n[X]$ est isomorphe à \mathbb{K}^{n+1} .

★ L'espace $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est isomorphe à \mathbb{K}^{np} .

5) Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

On sait que $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ a une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel.

Théorème (dimension de $\mathcal{L}(E, F)$) On suppose que E et F sont de dimensions finies. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie égale à :

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$$

Démonstration Si $E = \{0_E\}$, alors $\mathcal{L}(E, F) = \{0_{\mathcal{L}(E, F)}\}$ donc la formule annoncée est vraie. Supposons maintenant que $E \neq \{0_E\}$. Posons $n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$ et considérons une base (e_1, \dots, e_n) de E . On vérifie facilement que :

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & F^n \\ f & \longmapsto & (f(e_1), \dots, f(e_n)) \end{cases}$$

est une application linéaire. De plus, on sait que :

$$\forall (f_1, \dots, f_n) \in F^n, \exists ! f \in \mathcal{L}(E, F), \quad \varphi(f) = (f_1, \dots, f_n) \quad (\text{section III-3})$$

Autrement dit, φ est bijective de $\mathcal{L}(E, F)$ sur F^n donc les espaces vectoriels $\mathcal{L}(E, F)$ et F^n sont isomorphes. Or l'espace vectoriel :

$$F^n = F \times \dots \times F \quad (n \text{ fois})$$

est de dimension finie (car F l'est) égale à $\dim(F^n) = n \dim(F)$. On en déduit que $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie égale à :

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = n \dim(F) = \dim(E) \dim(F),$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

6) Détermination d'une application linéaire sur une somme directe

On définit ici une application linéaire, non pas par l'image d'une base, mais par ses restrictions sur deux sous-espaces vectoriels de E .

Théorème On suppose que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E (*i.e.* $E = E_1 \oplus E_2$). Soient $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$. Il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$f|_{E_1} = f_1 \quad \text{et} \quad f|_{E_2} = f_2$$

Démonstration On sait par hypothèse que $E = E_1 \oplus E_2$ donc tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme la somme d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2 . On raisonne par analyse-synthèse.

★ **Analyse** : soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $f|_{E_1} = f_1$ et $f|_{E_2} = f_2$ et $x \in E$. Il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$ et alors, par linéarité de f ,

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

L'application f est donc uniquement déterminée par :

$$f : \begin{cases} E = E_1 \oplus E_2 & \longrightarrow & F \\ x = x_1 + x_2 & \longmapsto & f_1(x_1) + f_2(x_2) \end{cases} \quad (*)$$

★ **Synthèse** : considérons l'application f définie par (*).

— Pour tout $x \in E_1$, on a :

$$f(x) = f(\underbrace{x}_x + \underbrace{0_E}_0) = f_1(x) + f_2(0_E) = f_1(x)$$

car f_2 est linéaire. Ainsi, $f|_{E_1} = f_1$. De la même manière, on a $f|_{E_2} = f_2$.

— Montrons maintenant que f est linéaire. Soient $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ deux vecteurs de E (où $x_1, y_1 \in E_1$ et $x_2, y_2 \in E_2$) et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$x + \lambda y = (x_1 + \lambda y_1) + (x_2 + \lambda y_2)$$

Comme $x_1 + \lambda y_1 \in E_1$ et $x_2 + \lambda y_2 \in E_2$, on a par définition de f :

$$\begin{aligned} f(x + \lambda y) &= f_1(x_1 + \lambda y_1) + f_2(x_2 + \lambda y_2) \\ &= f_1(x_1) + \lambda f_1(y_1) + f_2(x_2) + \lambda f_2(y_2) \quad (\text{car } f_1 \text{ et } f_2 \text{ sont linéaires}) \\ &= (f_1(x_1) + f_2(x_2)) + \lambda (f_1(y_1) + f_2(y_2)) \\ &= f(x) + \lambda f(y) \end{aligned}$$

Ainsi, $f \in \mathcal{L}(E, F)$. ■

Exemple On a la décomposition $\mathbb{R}_3[X] = \mathbb{R}_2[X] \oplus \text{Vect}(X^3)$ et on peut vérifier que les applications :

$$\varphi_1 : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{cases} \quad \text{et} \quad \varphi_2 : \begin{cases} \text{Vect}(X^3) & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ \lambda X^3 & \longmapsto & \lambda X \end{cases}$$

sont linéaires. D'après le théorème précédent, il existe une unique application $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}[X])$ telle que $\varphi|_{\mathbb{R}_2[X]} = \varphi_1$ et $\varphi|_{\text{Vect}(X^3)} = \varphi_2$. Il s'agit de l'application :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ aX^3 + bX^2 + cX + d & \longmapsto & aX + 2bX + c \end{cases}$$

IV – Rang d'une application linéaire

1) Définition

Définition (rang) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\text{Im}(f)$ est de dimension finie, alors on appelle *rang de f* , noté $\text{rg}(f)$, la dimension de l'espace vectoriel $\text{Im}(f)$, *i.e.* :

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f))$$

Remarques : on suppose que $\text{Im}(f)$ est de dimension finie.

★ Comme $\text{Im}(f) = f(E)$, on a :

$$\text{rg}(f) = \dim(f(E))$$

★ Si \mathcal{G} est une famille génératrice de E , alors :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(\mathcal{G})) \quad \text{donc} \quad \text{rg}(f) = \text{rg}(f(\mathcal{G})) \quad (\text{rang d'une famille de vecteurs})$$

★ Le rang est toujours bien défini si F est de dimension finie.

2) Propriétés du rang

Le rang permet de caractériser l'injectivité et la surjectivité d'une application linéaire.

Proposition On suppose que E et F sont de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a les équivalences suivantes :

- ★ $\text{rg}(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$;
- ★ f est injective $\iff \text{rg}(f) = \dim(E)$;
- ★ f est surjective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(F)$;
- ★ f est bijective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(E) = \dim(F)$.

Démonstration On pose $n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$ et on considère une base \mathcal{B} de E .

★ On sait que :

$$\text{rg}(f) = \text{rg}(f(\mathcal{B}))$$

Or $f(\mathcal{B})$ est une famille de n vecteurs de F donc, d'après les propriétés sur le rang d'une famille de vecteurs, on a :

$$\text{rg}(f(\mathcal{B})) \leq \min(n, \dim(F)) \quad \text{i.e.} \quad \text{rg}(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$$

★ On sait que f est injective si et seulement si la famille $f(\mathcal{B})$ est libre, *i.e.* si et seulement si :


$$\text{rg}(f(\mathcal{B})) = \text{Card}(f(\mathcal{B})) = n = \dim(E),$$

d'où le deuxième point.

★ Comme $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F (qui est de dimension finie), on a :

$$\begin{aligned} \text{rg}(f) = \dim(F) &\iff \dim(\text{Im}(f)) = \dim(F) \iff \text{Im}(f) = F \\ &\iff f \text{ est surjective} \end{aligned}$$

★ C'est une conséquence des deux points précédents. ■

 **Exercice** Calculer le rang des applications linéaires suivantes :

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, y, x + y) \end{cases}$
2. $g : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ \mathbb{P} & \longmapsto & 2\mathbb{P} - X\mathbb{P}' \end{cases}$

Que peut-on en déduire ?

Une solution.

1. Une base de \mathbb{R}^2 est $((1, 0), (0, 1))$ donc :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(1, 0), f(0, 1)) = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 1))$$

On peut vérifier que la famille $((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ est libre donc $\text{rg}(f) = 2$. On en déduit que f est injective (car le rang est égal à la dimension de \mathbb{R}^2) et que f n'est pas surjective.

2. Une base de $\mathbb{R}_2[X]$ est $(1, X, X^2)$ donc :

$$\text{Im}(g) = \text{Vect}(g(1), g(X), g(X^2)) = \text{Vect}(2, X, 0_{\mathbb{R}_2[X]}) = \text{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$$

donc $\text{rg}(g) = 2$. Comme $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$, l'application f n'est ni injective, ni surjective.

3) Rang d'une composition

Remarque : si $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et si E' est un sous-espace vectoriel de E , alors $\varphi|_{E'} \in \mathcal{L}(E', F)$ et :

$$\dim(\varphi(E')) = \dim(\varphi|_{E'}(E')) = \text{rg}(\varphi|_{E'})$$

Proposition (rang d'une composée) Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, où E, F et G sont de dimensions finies. Alors :

- ★ $\text{rg}(v \circ u) \leq \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$;
- ★ si u est un isomorphisme de E sur F , alors $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(v)$;
- ★ si v est un isomorphisme de F sur G , alors $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u)$.

Démonstration ★ Il s'agit de montrer que $\text{rg}(v \circ u) \leq \text{rg}(u)$ et $\text{rg}(v \circ u) \leq \text{rg}(v)$.

— Comme $u(E) \subset F$, on a $v(u(E)) \subset v(F)$ donc :

$$\dim((v \circ u)(E)) \leq \dim(v(F)) \quad \text{i.e.} \quad \text{rg}(v \circ u) \leq \text{rg}(v)$$

— De plus, en utilisant la remarque précédente,

$$\text{rg}(v \circ u) = \dim(v(u(E))) = \text{rg}(v|_{u(E)}) \leq \dim(u(E)),$$

la majoration provenant de la proposition précédente (premier point). Ainsi, $\text{rg}(v \circ u) \leq \text{rg}(u)$.

On en déduit que $\text{rg}(v \circ u) \leq \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$.

★ Si u soit bijective de E sur F , alors u est surjective donc :

$$(v \circ u)(E) = v(u(E)) = v(F) \quad \text{puis} \quad \dim((v \circ u)(E)) = \dim(v(F)),$$

i.e. $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(v)$.

★ Supposons maintenant que v soit bijective de F sur G . L'application linéaire $v|_{u(E)}$ est injective (car v l'est) donc :

$$\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(v|_{u(E)}) = \dim(u(E))$$

en utilisant la remarque ci-dessus et le deuxième point de la remarque précédente. Autrement dit, $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u)$. ■

4) Le théorème du rang

Le théorème qui suit fait le lien entre le noyau et l'image d'une application linéaire.

Théorème (forme géométrique du théorème du rang) Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels (de dimensions quelconques) et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\text{Ker}(f)$ possède un supplémentaire S dans E , alors la restriction $f|_S$ de f à S induit un isomorphisme d'espaces vectoriels de S sur $\text{Im}(f)$.

Démonstration Comme f est linéaire, la restriction de f à S est linéaire; de plus, cette application est clairement à valeurs dans $\text{Im}(f)$. Montrons maintenant que $f|_S$ à bijective.

★ Pour tout $x \in S$, on a :

$$x \in \text{Ker}(f|_S) \iff f|_S(x) = 0_F \iff f(x) = 0_F \iff x \in S \cap \text{Ker}(f) \iff x \in \{0_E\}$$

car $E = S \oplus \text{Ker}(f)$ (en particulier, S et $\text{Ker}(f)$ sont donc en somme directe dans E). Ainsi, $f|_S$ est injective.

★ Soit $y \in \text{Im}(f)$. Par définition de l'image, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $E = S \oplus \text{Ker}(f)$, il existe $(s, k) \in S \times \text{Ker}(f)$ tel que $x = s + k$. Par linéarité de f , on a :

$$y = f(s + k) = f(s) + f(k) = f(s) + 0_F = f(s) = f|_S(s)$$

car $s \in S$. Ainsi, s est un antécédent de y par l'application $f|_S$ dans S . Cette application est donc surjective.

Finalement, $f|_S$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels de S sur $\text{Im}(f)$. ■

Une conséquence directe est la formule du rang.

Corollaire (formule du rang) On suppose que E est de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f)$$

Démonstration ★ Comme $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E , il est de dimension finie. De plus, si (e_1, \dots, e_n) est une base de E (où $n = \dim(E)$), on sait que $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$. Par conséquent, $\text{Im}(f)$ est de dimension finie.

★ Comme E est de dimension finie, $\text{Ker}(f)$ possède un supplémentaire S dans E (cf. chapitre 22). D'après le théorème du rang, la restriction $f|_S : S \rightarrow \text{Im}(f)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Les espaces vectoriels S et $\text{Im}(f)$ étant de dimension finie, on a $\dim(S) = \dim(\text{Im}(f))$. Or :

$$\dim(E) = \dim(S) + \dim(\text{Ker}(f)),$$

d'où la formule du rang. ■

Exemple Si $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}^3)$ est surjective, alors $\text{Ker}(f)$ est une droite vectorielle.

Démonstration Si f est surjective, alors $\dim(\text{Im}(f)) = 3$ donc (formule du rang) :

$$\dim(\text{Ker}(f)) = \dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) - \dim(\text{Im}(f)) = 4 - 3 = 1,$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

V – Deux familles d’endomorphismes particuliers de E

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel (de dimension finie ou infinie).

1) Projecteur (ou projection) de E

(a) Projecteur (ou projection) sur F parallèlement à G

Définition (projecteur sur F parallèlement à G) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. On rappelle alors que :

$$\forall x \in E, \exists ! (x_F, x_G) \in F \times G, x = x_F + x_G$$

On appelle *projecteur (ou projection) sur F parallèlement à G* l’application :

$$p : \begin{cases} E = F \oplus G & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_G & \longmapsto & x_F \end{cases}$$

Exemple Dans \mathbb{R}^2 , on peut vérifier que :

$$\mathbb{R}^2 = \text{Vect}((0, 1)) \oplus \text{Vect}((2, 1))$$

et que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y) = \left(y - \frac{x}{2}\right) (0, 1) + \frac{x}{2} (2, 1)$$

Ainsi, en posant $F = \text{Vect}((0, 1))$ et $G = \text{Vect}((2, 1))$:

- ★ le projecteur sur F parallèlement à G est $p : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & \left(0, y - \frac{x}{2}\right) \end{cases} ;$
- ★ le projecteur sur G parallèlement à F est $q : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & \left(x, \frac{x}{2}\right) \end{cases} .$

Remarque : si p_F (respectivement p_G) est le projecteur sur F (respectivement sur G) parallèlement à G (respectivement à F), alors :

$$p_F + p_G = \text{Id}_E$$

(b) Propriétés

Proposition Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$ et soit p le projecteur sur F parallèlement à G . Alors :

- ★ $p \in \mathcal{L}(E)$;
- ★ p est une application *idempotente*, i.e. que $p^2 = p$;
- ★ $\text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{Id}_E) = F$ et $\text{Ker}(p) = G$;
- ★ $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$.

Remarque : si $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\varphi + \lambda \text{Id}_E) &= \{x \in E \mid (\varphi + \lambda \text{Id}_E)(x) = 0_F\} \\ &= \{x \in E \mid \varphi(x) + \lambda x = 0_F\} \\ &= \{x \in E \mid \varphi(x) = -\lambda x\} \end{aligned}$$

En particulier :

$$\text{Ker}(p - \text{Id}_E) = \{x \in E \mid p(x) = x\}$$

est l'ensemble des points fixes de p .

Démonstration

★ Soient $x = x_F + x_G \in E$, $y = y_F + y_G$ (où $x_F, y_F \in F$ et $x_G, y_G \in G$) et $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors :

$$x + \lambda y = (x_F + x_G) + \lambda(y_F + y_G) = \underbrace{(x_F + \lambda y_F)}_{\in F} + \underbrace{(x_G + \lambda y_G)}_{\in G}$$

et donc, par définition de p ,

$$p(x + \lambda y) = x_F + \lambda x_F = p(x) + \lambda p(y)$$

Ainsi, p est linéaire, i.e. $p \in \mathcal{L}(E)$.

★ Soit $x = x_F + x_G \in E$ (où $x_F \in F$ et $x_G \in G$). Alors $p(x) = x_F$ donc :

$$(p \circ p)(x) = p(p(x)) = p(x_F) = p(\underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G}) = x_F = p(x_F)$$

Ainsi, $p \circ p = p$, i.e. $p^2 = p$.

★ Soit $x = x_F + x_G \in E$ (où $x_F \in F$ et $x_G \in G$). Alors :

$$x \in \text{Ker}(p - \text{Id}_E) \iff p(x) = x \iff x_F = x_F + x_G \iff x_G = 0_E \iff x = x_F$$

Ceci montre l'égalité $\text{Ker}(p - \text{Id}_E) = F$. De plus, on a clairement l'inclusion $\text{Im}(p) \subset F$ (par définition de p), et si $x \in F$, alors $p(x) = x$ (car $x_F = x$ et $x_G = 0_E$) donc $\text{Im}(p) \subset F$. Par double inclusion, on a l'égalité $\text{Im}(p) = F$.

Avec les mêmes notations, on a également :

$$x \in \text{Ker}(p) \iff p(x) = 0_E \iff x_F = 0_E \iff x = x_G \iff x \in G$$

donc $\text{Ker}(p) = G$.

★ Cette décomposition est une simple réécriture de l'égalité $E = F \oplus G$. ■

(c) Projecteur de E : définition générale

Définition (projecteur de E) Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On dit que p est un *projecteur* (ou une *projection*) de E si :

- ★ $p \in \mathcal{L}(E)$;
- ★ p est idempotente, i.e. $p^2 = p$.

Exemple ★ L'application Id_E est un projecteur de E .

★ L'application $p : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, 0) \end{cases}$ est un projecteur de \mathbb{R}^2 .

★ L'application $q : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}\right) \end{cases}$ est un projecteur de \mathbb{R}^2 .

Le lien avec la définition géométrique de projecteur est le suivant.

Proposition Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur de E . Alors p est le projecteur sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

Démonstration Posons $F = \text{Im}(p)$ et $G = \text{Ker}(p)$.

★ Montrons que $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$.

— Pour tout $x \in E$, on a $x = p(x) + (x - p(x)) \in \text{Im}(p) + \text{Ker}(p)$ car $p(x) \in \text{Im}(p)$ et $x - p(x) \in \text{Ker}(p)$ car, par linéarité puis idempotence de p , on a :

$$p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = p(x) - p(x) = 0_E$$

On a donc l'inclusion $E \subset \text{Im}(p) + \text{Ker}(p)$, et comme l'inclusion réciproque est évidente, on a l'égalité $E = \text{Im}(p) + \text{Ker}(p)$.

— Soit $x \in \text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p)$. Comme $x \in \text{Im}(p)$, il existe $y \in E$ tel que $x = p(y)$ et comme $x \in \text{Ker}(p)$, on a $p(x) = 0_E$, i.e. $p(p(y)) = 0_E$. Or p est idempotente donc $x = p(y) = 0_E$. Ainsi, $\text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p) \subset \{0_E\}$ et comme l'inclusion réciproque est immédiate, on a l'égalité $\text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p) = \{0_E\}$.

Finalement, $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$.

★ Comme on a :

$$p : \begin{cases} E = F \oplus G & \longrightarrow E \\ x = p(x) + (x - p(x)) & \longmapsto p(x) \end{cases},$$

l'application p est bien le projecteur sur F parallèlement à G . ■

2) Symétrie (vectorielle) de E

(a) Symétrie (vectorielle) par rapport à F parallèlement à G

Définition (symétrie par rapport à F parallèlement à G) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. On appelle *symétrie (vectorielle) par rapport à F parallèlement à G* l'application :

$$s : \begin{cases} E = F \oplus G & \longrightarrow E \\ x = x_F + x_G & \longmapsto x_F - x_G \end{cases}$$

Exemple Dans \mathbb{R}^2 , on a la décomposition :

$$\mathbb{R}^2 = \text{Vect}((0, 1)) \oplus \text{Vect}((2, 1))$$

et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (x, y) = \left(y - \frac{x}{2}\right) (0, 1) + \frac{x}{2} (2, 1)$$

La symétrie par rapport à $F = \text{Vect}((0, 1))$ parallèlement à $G = \text{Vect}((2, 1))$ est l'application :

$$s : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (-x, y - x) \end{cases}$$

Remarque : en notant s la symétrie par rapport à F parallèlement à G et p_F (respectivement p_G) le projecteur sur F (respectivement G) parallèlement à G (respectivement F), on a les relations :

$$s = p_F - p_G = \text{Id}_E - 2p_F = 2p_G - \text{Id}_E$$

(b) Propriétés

Proposition Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$ et soit s la symétrie par rapport à F parallèlement à G . Alors :

- ★ s est une application *involutive*, i.e. que $s^2 = \text{Id}_E$;
- ★ $s \in \text{GL}(E)$ et $s^{-1} = s$;
- ★ $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) = F$ et $\text{Ker}(s + \text{Id}_E) = G$;
- ★ $E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.

Démonstration

★ Soit $x = x_F + x_G \in E$ (où $x_F \in F$ et $x_G \in G$). Par définition de s , on a :

$$(s \circ s)(x) = s(s(x)) = s(x_F - x_G) = s\left(\underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{(-x_G)}_{\in G}\right) = x_F - (-x_G) = x_F + x_G = s(x)$$

donc $s^2 = \text{Id}_E$.

★ Comme $s \circ s = \text{Id}_E$, l'application s est bijective d'inverse $s^{-1} = s$. Montrons maintenant que s est linéaire. Soient $x = x_F + x_G$ et $y = y_F + y_G$ deux vecteurs de E (où $x_F, y_F \in F$ et $x_G, y_G \in G$) et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

$$x + \lambda y = \underbrace{(x_F + \lambda y_F)}_{\in F} + \underbrace{(x_G + \lambda y_G)}_{\in G}$$

Par définition de s , on a :

$$s(x + \lambda y) = (x_F + \lambda y_F) - (x_G + \lambda y_G) = (x_F - x_G) + \lambda(y_F - y_G) = s(x) + \lambda s(y)$$

Donc s est linéaire. Finalement, s est un automorphisme de E , i.e. $s \in \text{GL}(E)$.

★ Soit $x = x_F + x_G \in E$ (où $x_F \in F$ et $x_G \in G$). On a :

$$x \in \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \iff s(x) = x \iff x_F - x_G = x_F + x_G \iff x_G = 0_E \iff x = x_F \in F$$

et :

$$x \in \text{Ker}(s + \text{Id}_E) \iff s(x) = -x \iff x_F - x_G = -x_F - x_G \iff x_F = 0_E \iff x = x_G \in G$$

★ Cette décomposition est un simple réécriture de l'égalité $E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$. ■

(c) **Symétrie de E : définition générale**

Définition (symétrie) Soit $s \in E^E$. On dit que s est une *symétrie* (vectorielle) de E si :

- ★ $s \in \mathcal{L}(E)$;
- ★ s est involutive, i.e. $s^2 = \text{Id}_E$.

Exemple L'application $\theta : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f & \longmapsto & (x \mapsto f(-x)) \end{cases}$ est une symétrie de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Démonstration ★ Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} \theta(f + \lambda g)(x) &= (f + \lambda g)(-x) = f(-x) + \lambda g(-x) = \theta(f)(x) + \lambda \theta(g)(x) \\ &= (\theta(f) + \lambda \theta(g))(x) \end{aligned}$$

Autrement dit, $\theta(f + \lambda g) = \theta(f) + \lambda \theta(g)$. Ainsi, $\theta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})$.

★ Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\theta^2(f)(x) = \theta(\theta(f))(x) = \theta(f)(-x) = f(-(-x)) = f(x)$$

donc $\theta^2(f) = f = \text{Id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}(f)$. Ainsi, $\theta^2 = \text{Id}$.

Finalement, θ est une symétrie de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. ■

Le lien avec la définition géométrique de symétrie est le suivant.

Proposition Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie de E . Alors s est la symétrie par rapport à $F = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ parallèlement à $G = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.

Démonstration Posons $F = \text{Ker}(s - \text{Id}_E)$ et $G = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.

★ Montrons que $E = F \oplus G$.

— Pour tout $x \in E$, on a :

$$x = \frac{1}{2}(x + s(x)) + \frac{1}{2}(x - s(x))$$

Posons $y = x + s(x)$. On a $y \in F$ car :

$$(s - \text{Id}_E)(y) = s(y) - y = s(x + s(x)) - x - s(x) = s(x) + s^2(x) - x - s(x) \quad (\text{car } s \text{ est linéaire}) \\ = 0_E$$

car $s^2 = \text{Id}_E$. On en déduit que $\frac{1}{2}y \in F$. De la même manière, on montre que $\frac{1}{2}(x - s(x)) \in G$ et donc $x \in F + G$. Ainsi, on a l'inclusion $E \subset F + G$. Comme l'inclusion réciproque est évidente, on a $E = F + G$.

— Soit $x \in F \cap G$. Alors $s(x) = x$ et $s(x) = -x$ donc $x = -x$ puis $x = 0_E$. Ainsi, $F \cap G \subset \{0_E\}$ et comme l'inclusion réciproque est évidente, on a $F \cap G = \{0_E\}$.

Finalement, on a bien $E = F \oplus G$.

★ Pour tout $x \in E$, on a :

$$x = \underbrace{\frac{1}{2}(x + s(x))}_{\in F} + \underbrace{\frac{1}{2}(x - s(x))}_{\in G} \quad \text{et} \quad s(x) = \frac{1}{2}(x + s(x)) - \frac{1}{2}(x - s(x))$$

donc s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G . ■

VI – Formes linéaires et hyperplans

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel différent de l'espace nul (de dimension finie ou infinie).

1) Formes linéaires

Définition (forme linéaire) ★ On appelle *forme linéaire sur E* tout élément de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

★ L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est aussi noté E^* . On l'appelle l'*espace dual de E* .

Exemple Les applications :

$$\star \varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x - y - z \end{cases}$$

$$\star \text{tr} : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} & \longmapsto & \sum_{i=1}^n m_{i,i} \end{cases} \quad (\text{application trace})$$

$$\star \text{ pour tout } j \in I, e_j^* : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & e_j^*(x) \end{cases} \quad (\text{ou } (e_i)_{i \in I} \text{ est une base de } E)$$

sont des formes linéaires.

Proposition Soit $\varphi \in E^*$. Alors φ est surjective si et seulement si $\varphi \neq 0_{E^*}$ (i.e. : $\exists x \in E, \varphi(x) \neq 0$).

Démonstration $\boxed{\Rightarrow}$ Si $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$ est surjective, alors il existe $x \in E$ tel que $\varphi(x) = 1_{\mathbb{K}}$. En particulier, $\varphi(x) \neq 0_{\mathbb{K}}$ donc l'application φ n'est pas nulle.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $\varphi \neq 0_{E^*}$. Il existe alors $x \in E$ tel que $\varphi(x) \neq 0_{\mathbb{K}}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$\varphi\left(\underbrace{\frac{\lambda}{\varphi(x)} x}_{\in \mathbb{K}}\right) = \frac{\lambda}{\varphi(x)} \varphi(x) = \lambda$$

donc $\frac{\lambda}{\varphi(x)} x \in E$ est un antécédent de λ par l'application φ dans E . Donc φ est surjective. ■

Remarque : comme $\dim(\mathbb{K}) = 1$, une forme linéaire non nulle $\varphi \in E^*$ est injective si et seulement si E est de dimension finie égale à 1.

2) Hyperplans

Définition (hyperplan et équation d'un hyperplan) Soit H un sous-espace vectoriel de E .

★ On dit que H est un *hyperplan de E* s'il existe $\varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$ tel que :

$$H = \text{Ker}(\varphi)$$

★ L'équation $\varphi(x) = 0$ est appelée une *équation de l'hyperplan*.

Exemple Les ensembles :

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}, \quad \mathcal{H} = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \sum_{k=1}^n m_{k,k} = 0 \right\}$$

et $H_j = \{x \in E \mid e_j^*(x)\}$ (où $j \in I$) sont des hyperplans de \mathbb{R}^3 , $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et E respectivement. Une équation de \mathcal{P} est $x - y - z = 0$.

Démonstration Soit $j \in I$. Les applications φ , tr et e_j^* (cf. exemple précédent) sont des formes linéaires telles que :

$$\mathcal{P} = \text{Ker}(\varphi), \quad \mathcal{H} = \text{Ker}(\text{tr}) \quad \text{et} \quad H_j = \text{Ker}(e_j^*)$$

De plus, ces formes linéaires sont non nulles car :

$$\varphi((1, 0, 0)) = 1 \neq 0, \quad \text{tr}(I_n) = n \neq 0 \quad \text{et} \quad e_j^*(e_j) = 1$$

D'où le résultat par définition d'un hyperplan. ■

Proposition (caractérisation géométrique d'un hyperplan) Soit H un sous-espace vectoriel de E . Alors :

$$H \text{ est un hyperplan de } E \iff \forall u \in E \setminus H, E = H \oplus \mathcal{D}_u$$

On rappelle que si $u \neq 0_E$, alors \mathcal{D}_u désigne la droite vectorielle dirigée par u , i.e. :

$$\mathcal{D}_u = \{\lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \text{Vect}(u)$$

Démonstration $\boxed{\implies}$ Supposons que H soit un hyperplan de E . Soit $u \in E \setminus H$. Par hypothèse, il existe $\varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$ tel que $H = \text{Ker}(\varphi)$. Montrons que $E = H \oplus \mathcal{D}_u$.

— Soit $x \in H \cap \mathcal{D}_u$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x = \lambda u$. Comme $x \in H$, on a :

$$\varphi(x)0_{\mathbb{K}} \quad \text{i.e.} \quad \lambda\varphi(u) = 0_{\mathbb{K}}$$

Mais $u \notin H$ et $H = \text{Ker}(\varphi)$ donc $\varphi(u) \neq 0_{\mathbb{K}}$. On en déduit que $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ puis $x = 0_E$. Ainsi, $H \cap \mathcal{D}_u \subset \{0_E\}$. L'inclusion réciproque étant immédiate, on a l'égalité $H \cap \mathcal{D}_u = \{0_E\}$.

— Montrons maintenant que $E = H + \mathcal{D}_u$. Soit $x \in E$. On a $\varphi(u) \neq 0_{\mathbb{K}}$ donc on peut écrire que :

$$x = \left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)}u \right) + \underbrace{\frac{\varphi(x)}{\varphi(u)}}_{\in \mathbb{K}} u \in H + \mathcal{D}_u,$$

car, par linéarité de φ ,

$$\varphi \left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)}u \right) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)}\varphi(u) = 0_{\mathbb{K}}$$

On a donc l'inclusion $E \subset H + \mathcal{D}_u$. L'inclusion réciproque est évidente, donc $E = H + \mathcal{D}_u$.

Finalement, $E = H \oplus \mathcal{D}_u$.

$\boxed{\impliedby}$ Soit $u \in E \setminus H$. On suppose que $E = H \oplus \mathcal{D}_u$. Montrons que H est un hyperplan de E . Il s'agit de montrer qu'il existe une forme linéaire non nulle $\varphi \in E^*$ telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$. Considérons les deux applications :

$$\varphi_H : \begin{cases} H & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & 0_{\mathbb{K}} \end{cases} \quad \text{et} \quad \varphi_u : \begin{cases} \mathcal{D}_u & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \lambda u & \longmapsto & \lambda \end{cases}$$

On vérifie facilement que ces deux applications sont des formes linéaires. Comme $E = H \oplus \mathcal{D}_u$, il existe une unique forme linéaire φ sur E telle que $\varphi|_H = \varphi_H$ et $\varphi|_{\mathcal{D}_u} = \varphi_u$ (théorème de la section III-6). Comme $\varphi(u) = 1$, cette application est non nulle et on vérifie facilement que son noyau est H . Donc H est un hyperplan de E . ■

Corollaire (hyperplans en dimension finie) On suppose que E est de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}^*$. Les hyperplans de E sont les sous-espaces vectoriels de E de dimension $n - 1$.

Démonstration \star Soit H un hyperplan de E ; il existe une forme linéaire non nulle $\varphi \in E^*$ telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$. Le théorème du rang s'applique puisque E est de dimension finie et on a :

$$\dim(\text{Ker}(\varphi)) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(\varphi)) = n - \dim(\mathbb{K}) = n - 1$$

puisque φ est surjective (en tant que forme linéaire non nulle).

\star Soit H un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$ et E et soit $u \in E \setminus H$. Montrons que $E = H \oplus \mathcal{D}_u$. D'après la formule de Grassmann (qui s'applique puisque E est de dimension finie), on a :

$$\dim(H + \mathcal{D}_u) = \dim(H) + \dim(\mathcal{D}_u) - \dim(H \cap \mathcal{D}_u) = n - \dim(H \cap \mathcal{D}_u)$$

Or $H \cap \mathcal{D}_u = \{0_E\}$ (car cette intersection est de dimension 0 ou 1 et elle est égale à 1 si et seulement si $\mathcal{D}_u \subset H$, ce qui n'est pas le cas). Ainsi :

$$\dim(H + \mathcal{D}_u) = n = \dim(E)$$

Par ailleurs, on sait que $H \cap \mathcal{D}_u = \{0_E\}$ donc $E = H \oplus \mathcal{D}_u$. La proposition précédente entraîne donc que H est un hyperplan de E . ■

Exemple L'ensemble \mathcal{H} (cf. exemples précédents) est de dimension $n^2 - 1$.

Proposition (comparaison des équations d'un hyperplan) Soient H un hyperplan de E et φ, ψ deux formes linéaires non nulles de E telles que :

$$H = \text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)$$

Alors :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad \psi = \lambda\varphi$$

Démonstration Comme H est un hyperplan de E , on sait qu'il existe $u \in E \setminus H$ tel que $E = H \oplus \text{Vect}(u)$. La forme linéaire $\varphi(u)\psi - \psi(u)\varphi$ est nulle sur H (par définition de φ et ψ) et on remarque qu'elle est nulle en u , donc aussi sur \mathcal{D}_u . Par linéarité de cette forme linéaire, elle est nulle sur E . Comme $\varphi(u) \neq 0_{\mathbb{K}}$, on conclut que :

$$\psi = \underbrace{\frac{\psi(u)}{\varphi(u)}}_{=\lambda \in \mathbb{K}} \varphi,$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

Remarque : à multiplication par un scalaire non nul près, il existe une et une seule équation pour un hyperplan. Par exemple, si on considère l'hyperplan \mathcal{P} de \mathbb{R}^3 (d'équation $x - y - z = 0$), alors \mathcal{P} admet aussi pour équation $\lambda x - \lambda y - \lambda z = 0$ où $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et il n'existe pas d'autre équation pour \mathcal{P} .

Proposition (intersection d'hyperplans) On suppose que E est de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- ★ L'intersection de r hyperplans de E est un sous-espace vectoriel de E de dimension au moins égale à $n - r$.
- ★ Tout sous-espace vectoriel de E de dimension $n - r$ est l'intersection d'exactly r hyperplans de E .

Démonstration ★ Soient H_1, \dots, H_r des hyperplans de E . Pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, il existe une forme linéaire non nulle φ_k de E telle que $H_k = \text{Ker}(\varphi_k)$. Considérons alors l'application :

$$\Phi : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^r \\ x & \longmapsto & (\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)) \end{cases}$$

On peut vérifier que Φ est linéaire et telle que $\text{Ker}(\Phi) = H_1 \cap \dots \cap H_r$. Comme E est de dimension finie, le théorème du rang nous donne :

$$\dim(H_1 \cap \dots \cap H_r) = \dim(E) - \text{rg}(\Phi) \geq \dim(E) - \dim(\mathbb{K}^r) = n - r$$

puisque $\text{rg}(\Phi) \leq \dim(\mathbb{K}^r)$.

- ★ Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n - r$. Considérons une base (e_1, \dots, e_n) de E dont les $n - r$ derniers vecteurs forment une base de F (une telle base existe d'après le théorème de la base incomplète). Soit $x \in E$. Alors :

$$\begin{aligned} x \in F &\iff x \in \text{Vect}(e_{r+1}, \dots, e_n) \iff e_1^*(x) = \dots = e_r^*(x) = 0 \\ &\iff x \in \text{Ker}(e_1^*) \cap \dots \cap \text{Ker}(e_r^*) \end{aligned}$$

Ainsi, $F = \text{Ker}(e_1^*) \cap \dots \cap \text{Ker}(e_r^*)$. Les formes linéaires e_1^*, \dots, e_r^* sont non nulles donc leurs noyaux sont des hyperplans de E . Ainsi, F est l'intersection de r hyperplans de E , ce qu'il fallait démontrer. ■

Exemple ★ Dans \mathbb{R}^3 , l'intersection de deux plans vectoriels, dont les équations ne sont pas proportionnelles, est une droite vectorielle.

- ★ Réciproquement, toute droite vectorielle de \mathbb{R}^3 peut être réalisée comme l'intersection de deux plans vectoriels de \mathbb{R}^3 .