Analyse asymptotique

I – Comparaison de fonctions

L'un des objectifs de ce chapitre est de calculer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}, \qquad \ell_2 = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \qquad \text{et} \qquad \ell_3 = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

La première limite donne lieu à la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». Pour lever cette indétermination, il s'agit de comprendre à quelle *vitesse* la fonction $x \longmapsto e^x - 1 - x$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par rapport à la fonction $x \longmapsto x^2$.

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point, a et est un élément de $\overline{I}$ et $f, g, h, k \in I^{\mathbb{R}}$ sont des fonctions définies sur I à valeurs réelles (voire complexes) ; on supposera par ailleurs que ces fonctions ne s'annulent pas sur I (sauf éventuellement au point a).

1) Négligeabilité et domination

(a) Définitions et exemples

Définition (négligeabilité, domination) ⋆ On dit que f est *négligeable devant g au voisinage de a*, noté $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

⋆ On dit que f est *dominée par la fonction g au voisinage de a*, noté $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$, si la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

Exemple ⋆ On a $\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$ car, par croissances comparées, on a $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

⋆ Par le même théorème, on a $\ln(x) \underset{x\to 0^+}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.

⋆ On a $x^4 \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$ (car $\frac{x^4}{x^2} = x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$) ; ceci exprime la *petitesse* de x^4 devant x^2 quand x est petit. Par contre, on a $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} o(x^4)$; cette relation exprime l'*immensité* de x^4 par rapport à x^2 quand x est grand.

⋆ On a $\sin(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$ car $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0).

⋆ On a $\sin(x) \underset{x\to 2}{=} \mathcal{O}(1)$ car :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad -1 \leqslant \frac{\sin(x)}{1} = \sin(x) \leqslant 1$$

⋆ De même, $x \underset{x\to+\infty}{=} \mathcal{O}(x+1)$ car :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad 0 \leqslant \frac{x}{x+1} \leqslant 1$$

Remarque : on a

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(1) \iff f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

Exemple On a $\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$.

(b) Propriétés

Proposition *(i)* **Transitivité des relations $\mathcal{O}$ et o**

Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$ (même propriété pour $\mathcal{O}$).

Exemple Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^2)$, alors comme on sait que $x^2 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x)$, on a aussi $f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x)$.

(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(\lambda g(x))$ et $\lambda f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ (même propriété pour $\mathcal{O}$).

On dit que les relations o et $\mathcal{O}$ *absorbent les constantes multiplicatives.*

Exemple Si on sait que $f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(\frac{x}{2}\right)$, alors on a aussi $f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x)$.

(iii) Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$, alors $f(x)+g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$ (même propriété pour $\mathcal{O}$).

Exemple On a $\mathrm{o}(x)+\mathrm{o}(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x)$.

(iv) Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ et $h(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(k(x))$, alors $f(x)h(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x)k(x))$.

Exemple Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^2)$ et $g(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^3)$, alors $xf(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^5)$.

(v) Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$, alors $f(x)h(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x)h(x))$.

Exemple Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^2)$, alors $xf(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^3)$.

(vi) Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$.

Démonstration (pour la relation o) *(i)* En utilisant l'hypothèse, on a :

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0\times 0 = 0$$

donc $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$.

(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Comme $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$, on a :

$$\frac{f(x)}{\lambda g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\lambda f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

donc $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(\lambda g(x))$ et $\lambda f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$.

(iii) De la même façon :
$$\frac{f(x)+g(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{h(x)} + \frac{g(x)}{h(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0+0=0$$
donc $f(x)+g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$.

(iv) On a :
$$\frac{f(x)h(x)}{g(x)k(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{h(x)}{k(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0\times 0=0$$
donc $f(x)h(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x)h(x))$.

(v) De même :
$$\frac{f(x)h(x)}{g(x)h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$$
donc $f(x)h(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x)h(x))$.

(vi) Si f est négligeable devant la fonction g au voisinage de a, alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$ (limite finie). La fonction $\dfrac{f}{g}$ est donc bornée au voisinage de a, ce qu'il f allait démontrer. ■

Exemple Admettons que $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\mathrm{o}(x)$ et que $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x+\mathrm{o}(x)$. Alors :
$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x \sin(x) &\underset{x\to 0}{=} x+\mathrm{o}(x)+2x\,\mathrm{o}(x)+\mathrm{o}(x)\times\mathrm{o}(x)\\ &\underset{x\to 0}{=} x+\mathrm{o}(x)+\mathrm{o}(x^2)+\mathrm{o}(x^2)\\ &\underset{x\to 0}{=} x+\mathrm{o}(x)\end{aligned}$$

2) Équivalence entre fonctions

(a) Définition et exemples

Définition (fonctions équivalentes) On dit que f *est équivalente à* g *au voisinage de* a, noté $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Exemple

- ⋆ On a $x+1 \underset{x\to +\infty}{\sim} x$ car :
$$\frac{x+1}{x} = 1+\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 1$$
- ⋆ On a $x^{2023}+x^2+5x \underset{x\to 0}{\sim} 5x$ car :
$$\frac{x^{2023}+x^2+5x}{5x} = \frac{x^{2022}}{5}+\frac{x}{5}+1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$
- ⋆ On sait également que $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

(b) Propriétés

Proposition La relation « être équivalente à » est une relation d'équivalence.

Démonstration ⋆ **Réflexivité :** on a clairement $f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.

⋆ **Symétrie :** si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{1}{1} = 1$$

donc $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.

⋆ **Transitivité :** supposons que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et que $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$. Alors :

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1 \times 1 = 1$$

donc $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$.

La relation « être équivalente à » est donc bien une relation d'équivalence. ■

Proposition On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et que $h(x) \underset{x\to a}{\sim} k(x)$. Alors :

(*i*) $f(x)h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)k(x)$;

(*ii*) $\dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{1}{g(x)}$;

(*iii*) $\dfrac{f(x)}{h(x)} \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{g(x)}{k(x)}$;

(*iv*) $|f(x)| \underset{x\to a}{\sim} |g(x)|$;

(*v*) si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff f(x) \underset{x\to a}{\sim} \ell$$

Démonstration Il suffit d'écrire la définition. ■

Exemple Comme $e^x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, on a $e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$.

✎✎✎ **Exercice** En admettant que $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ et que $1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$, calculer la limite :

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{x(e^x - 1)}{1 - \cos(x)}$$

Solution. Soit $f : x \longmapsto \dfrac{x(e^x-1)}{1-\cos(x)}$. Par produit et quotient d'équivalents, on a :

$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x \times x}{\frac{x^2}{2}} = 2$$

donc (propriété (*v*) ci-dessus) $L = \lim\limits_{x\to 0} 2 = 2$.

Proposition On a :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + o(g(x))$$

Démonstration En effet :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + \mathrm{o}(g(x)) \iff f(x) - g(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x)) \iff \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$$
$$\iff \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \xrightarrow[x\to a]{} 0$$
$$\iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$$
$$\iff f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$$

■

Exemple ⋆ On a $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x)$.

⋆ Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \ell + \mathrm{o}(1)$. Par exemple, $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + \mathrm{o}(1)$.

Attention : la relation $\underset{x\to a}{\sim}$ n'est pas compatible avec l'addition (/soustraction) !

Exemple On a $x - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x + 1$ et $-x \underset{x\to+\infty}{\sim} -x$ mais $-1 \underset{x\to+\infty}{\not\sim} 1$.

Proposition (limite et signe) On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$.

(i) Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

(ii) Si g est à valeurs strictement positives au voisinage de a, alors f est à valeurs strictement positives au voisinage de a et :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \qquad f(x)^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g(x)^\alpha$$

Démonstration (i) On a :

$$f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \times g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1 \times \ell = \ell$$

(ii) On a $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1 > 0$ donc la fonction $\dfrac{f}{g}$ est à valeurs strictement positives au voisinage de a. Par produit, la fonction $f = \dfrac{f}{g} \times g$ est à valeurs strictement positives au voisinage de a. De plus :

$$\frac{f(x)^\alpha}{g(x)^\alpha} = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^\alpha \xrightarrow[x\to a]{} 1^\alpha = 1$$

donc $f(x)^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g(x)^\alpha$. ■

Exemple ⋆ Si on sait que $f(x) \underset{x\to-\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

⋆ On a $\sqrt{x^4 + 3x^2 + 1} \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2$.

✎✎✎ **Exercice (vrai ou faux ?)** Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$, a-t-on nécessairement $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$?

Le résultat suivant est très utilisé en pratique.

Proposition (principe de substitution) Soit $\varphi \in I^J$ et $b \in \overline{J}$. On suppose que :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \qquad \text{et que} \qquad \lim_{x\to b} \varphi(x) = a$$

Alors :

$$f(\varphi(x)) \underset{x\to b}{\sim} g(\varphi(x))$$

Démonstration D'après le théorème de composition des limites, on a :

$$\lim_{x\to b} \frac{f(\varphi(x))}{g(\varphi(x))} = \lim_{y\to a} \frac{f(y)}{g(y)} = 1,$$

ce qu'il fallait démontrer. ∎

Exemple En admettant que $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, on a $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ car $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

✎✎✎ **Exercice** Déterminer la limite $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(\mathrm{e}^{-x})}$ en admettant que :

$$1-\cos(t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$$

Attention : il est interdit de composer *à gauche* avec les équivalents.

Exemple On a $x+1 \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ mais $\mathrm{e}^{x+1} \underset{x\to+\infty}{\not\sim} \mathrm{e}^x$.

Proposition (lien entre $\mathcal{O}$, o et $\sim$) (*i*) On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x))$ et que $g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$. Alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(h(x))$ (même propriété en remplaçant o par $\mathcal{O}$).

(*ii*) Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x))$.

Démonstration (*i*) On a :

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1\times 0 = 0,$$

d'où la relation annoncée.

(*ii*) Par hypothèse, la fonction $\frac{f}{g}$ tend vers 1 (limite finie) quand x tend vers a donc cette fonction est bornée au voisinage de a. ∎

3) Équivalents usuels

Proposition (équivalents usuels) Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n \leqslant p$ et $a_n, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ tels que $a_n \neq 0$ et $a_p \neq 0$. Alors :

$$\sum_{k=n}^{p} a_k x^k \underset{x\to 0}{\sim} a_n x^n \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=n}^{p} a_k x^k \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_p x^p$$

On dispose des équivalents suivants en 0 :

(*i*) $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$

(*ii*) $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

(*iii*) $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et, en particulier, $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$

(*iv*) $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

(*v*) $1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$

(vi) $\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

(vii) $\mathrm{ch}(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$

$(viii)$ $\mathrm{th}(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

(ix) $\arcsin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

(x) $\arctan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

(xi) $\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

Démonstration Hormis les points (v) et (vii), tous les équivalents découlent de la dérivabilité en 0 de la fonction usuelle mise en jeu. Par exemple pour (iii), si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, alors la fonction $f : x \longmapsto (1+x)^\alpha$ est dérivable en 0 (car dérivable sur $]-1,+\infty[$) et :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f'(0) = \alpha$$

d'où l'équivalent annoncée. Pour le point (v), on a :

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} 2\frac{x^2/4}{x^2} = \frac{1}{2}$$

On procède de la même manière pour le point (vii). ∎

✎✎✎ **Exercice** Déterminer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{x\to 0} \sin(x)\frac{e^{x^2}-1}{\cos(x)-1} \qquad \text{et} \qquad \ell_2 = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x^4+x^2}-2x}{\sqrt[3]{8x^3+12x+9}}$$

Proposition (théorème des gendarmes pour les équivalents) On suppose ici que les fonctions f, g et h sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Par ailleurs, si :

- ⋆ $\forall x \in I, \qquad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$;
- ⋆ $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$.

Alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.

Démonstration Pour tout $x \in I$, on a en divisant par $f(x) > 0$ dans les inégalités :

$$\forall x \in I, \qquad 1 \leqslant \frac{g(x)}{f(x)} \leqslant \frac{h(x)}{f(x)}$$

d'où le résultat d'après le théorème des gendarmes. ∎

Exemple Considérons une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x > 0, \qquad x \leqslant f(x) \leqslant x + \sqrt{x} - \ln(x)$$

Comme $x + \sqrt{x} - \ln(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} x$, le résultat précédent implique que $f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} x$.

4) Croissances comparées

On peut reformuler les croissances comparées à l'aide de la négligeabilité.

Proposition (croissances comparées) Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$.

- ⋆ Au voisinage de $+\infty$:

$$\ln(x)^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x^\beta) \qquad \text{et} \qquad x^\beta \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(\mathrm{e}^{\gamma x})$$

- ⋆ Au voisinage de 0^+ :

$$\ln(x)^\alpha \underset{x\to 0^+}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$$

Démonstration Il s'agit simplement d'une réécriture des croissances comparées bien connues. ■

II – Développements limités

Dans cette partie, on considère $a \in \mathbb{R}$ et f est une fonction définie au voisinage de a.

1) Définition

Définition (développement limité) Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un *développement limité à l'ordre n au voisinage de a* (en abrégé « f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ ») s'il existe $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big),$$

i.e. :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k}{(x-a)^n} = 0$$

Le polynôme $T_{n,f,a} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k (X-a)^k$ est appelé *partie régulière* du $\mathrm{DL}_n(a)$ de f.

Exemple

- ⋆ Exemple de $\mathrm{DL}_1(0)$: $1 - x + x^2 \underset{x\to 0}{=} 1 - x + \mathrm{o}(x)$

  Pour obtenir un DL en 0 d'un polynôme, il suffit donc de *tronquer* le polynôme à l'ordre voulu.
- ⋆ Exemple de $\mathrm{DL}_1(1)$: $2 + x \underset{1}{=} 3 + (x-1) + \mathrm{o}(x-1)$.
- ⋆ Dans le chapitre sur la dérivation, on a vu que $f \in \mathbb{R}^I$ est dérivable en $a \in I$ si et seulement si :

$$(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^I,\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ f(x) = f(a) + \lambda(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

  Autrement dit, f est dérivable en a si et seulement si f admet un $\mathrm{DL}_1(a)$.
- ⋆ Parmi les DL à connaître, le plus « simple » est le suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

  Soient en effet $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

donc :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

Remarques.

- ⋆ L'intérêt est d'approximer la fonction au voisinage d'un point par un polynôme.
- ⋆ Pour $a = 0$, dire que f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ signifie qu'il existe $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

- ⋆ Un développement limité en un point peut aussi donner une indication sur le signe de la fonction au voisinage du point.

Exemple Supposons que $f(x) \underset{x\to 2}{=} 2(x-2)^2 + \mathrm{o}(x-2)^2$, alors :

$$f(x) \underset{x\to 2}{\sim} 2(x-2)^2$$

et donc f est positive au voisinage de 2, ce qui signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f \geqslant 0$ sur l'intervalle $[2-\varepsilon, 2+\varepsilon]$.

2) Premières propriétés

Proposition (unicité des coefficients) Si une fonction f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, alors les coefficients de la partie régulière sont uniquement déterminés.

Démonstration Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe deux familles $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, distinctes, telles que :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^n) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^n)$$

Par soustraction, il vient :

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k)(x-a)^k \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}((x-a)^n)$$

Comme les deux familles sont distinctes, on peut définir $k_0 = \min \left\{ k \in [\![0, n]\!] \,\middle|\, a_k \neq b_k \right\}$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k)(x-a)^k \underset{x\to a}{\sim} (a_{k_0} - b_{k_0})(x-a)^{k_0}$$

et alors $(a_{k_0} - b_{k_0})(x-a)^{k_0} \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$, ce qui est absurde car $k_0 \leqslant n$. ∎

Proposition Soit f une fonction définie au voisinage de 0 admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ (où $n \in \mathbb{N}$).

- ⋆ Si f est paire, alors la partie régulière du DL ne comporte que des monômes de degrés pairs.
- ⋆ Si f est impaire, alors la partie régulière du DL ne comporte que des monômes de degrés impairs.

Démonstration Supposons que f soit paire et notons :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

le $\mathrm{DL}_n(0)$ de f. Par composition des limites, on peut écrire que :

$$f(x) = f(-x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (-1)^k x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

et donc, par unicité des coefficients d'un développement limité, on obtient que $a_k = 0$ si $k \in [\![0, n]\!]$ est un entier impair. C'est le même raisonnement dans le cas impair. ■

Proposition (troncature) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f admet le $\mathrm{DL}_n(a)$ suivant :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big),$$

alors, pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, la fonction f admet le $\mathrm{DL}_p(a)$ suivant :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{p} a_k (x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^p\big),$$

Démonstration Il suffit de remarquer que :

$$\sum_{k=p+1}^{n} a_k (x-a)^k \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\big((x-a)^p\big)$$

Exemple Par exemple, si $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x - x^2 + 4x^3 + \mathrm{o}(x^5)$, alors le $\mathrm{DL}_2(0)$ de f est $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x - x^2 + \mathrm{o}(x^2)$.

3) Formule de Taylor-Young

(a) Le théorème

On sait que, si une fonction admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, alors ce développement est uniquement déterminé. Le résultat suivant précise la valeur des coefficients et justifie l'existence du DL lorsque la fonction est suffisamment régulière.

Théorème (formule de Taylor-Young) Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de a. Alors f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ qui est donné par :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$$

Démonstration Elle est admise à ce stade. On la justifiera à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral. ■

Remarque : en particulier, si f est de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de 0, alors f admet pour $\mathrm{DL}_n(0)$:

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k\,!} x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

(b) Les développements limités usuels en 0

Les fonctions usuelles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de dérivabilité, on peut donc écrire des DL à tout ordre. Fixons $n \in \mathbb{N}$.

⋆ On sait déjà que :

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

De la même façon, on peut montrer que :

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

⋆ Considérons la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f^{(k)}(0) = f(0) = 1$ donc (formule de Taylor-Young) :

$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

⋆ En considérant les dérivées successives ainsi que la formule de Taylor-Young, on peut aussi obtenir les développements limités suivants (à connaître) :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n)$$

et :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \qquad (1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k\,!} x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

et :

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)\,!} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

et :

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,!} + \mathrm{o}(x^{2n+2})$$

et :

$$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)\,!} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

et :

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\,!} + \mathrm{o}(x^{2n+2})$$

et :

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \mathrm{o}(x^{2n+2})$$

et :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$$

Remarque : en tronquant à l'ordre 1 ou 2 les développements limités, on retrouve les équivalents usuels. Par exemple, $\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \mathrm{o}(x)$, ce qui signifie exactement que $\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.

4) Opérations sur les développements limités

(a) Linéarité

Proposition Soient f et g admettant des $\mathrm{DL}_n(0)$ tels que :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + \mathrm{o}(x^n) \qquad \text{et} \qquad g(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} d_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$. Alors la fonction $\alpha f + \beta g$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ donné par :

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (\alpha c_k + \beta d_k) x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

Démonstration Il suffit de faire le calcul. ■

✎✎✎ **Exercice** Déterminer un $\mathrm{DL}_4(0)$ de $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

(b) Produit

Proposition Soient f et g admettant des $\mathrm{DL}_n(0)$ tels que :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + \mathrm{o}(x^n) \qquad \text{et} \qquad g(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} d_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

Alors la fonction fg admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ donné par :

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

où :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad a_k = \sum_{i=0}^{k} c_i d_{k-i}$$

Démonstration Il suffit de faire le calcul. ■

Exemple Donner le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1-x}$.

Solution. On sait que

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \mathrm{o}(x^3)$$

donc, en développant le produit, on obtient :

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \mathrm{o}(x^3)$$

(c) Composition

Proposition Soit f définie sur I contenant 0 admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ et g définie sur J contenant 0 admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$. On suppose que $f(I) \subset J$ et que $f(0) = 0$. Alors $g \circ f$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$.

Démonstration admis ■

En pratique, pour obtenir le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $g \circ f$, on écrit le $\mathrm{DL}_n(0)$ de f ($f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}(x^n)$) et celui de g puis on substitue le $\mathrm{DL}_n(0)$ de f à x dans $g(x)$ (il est essentiel que $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$).

Exemple Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x) = \mathrm{e}^{\sin(x)}$.

Solution. On sait que :

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^u \underset{0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \mathrm{o}(u^3)$$

Comme $\sin(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3}{6} + \mathrm{o}(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3) \end{aligned}$$

d'où :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3)$$

✎✎✎ **Exercice** Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x) = \ln(1 + \cos(2x))$.

Solution. On sait que

$$\cos(2x) \underset{x\to 0}{=} 1 - 2x^2 + \mathrm{o}(x^3) \qquad \text{donc} \qquad 1 + \cos(2x) = 2 - 2x^2 + \mathrm{o}(x^3) = 2(1 - x^2 + \mathrm{o}(x^3))$$

De plus :

$$\ln(1 + u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + \mathrm{o}(u^3)$$

On a :

$$f(x) = \ln(2) + \ln(1 - x^2 + \mathrm{o}(x^3))$$

Comme $-x^2 + \mathrm{o}(x^3) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on a par composition :

$$\begin{aligned} \ln(1 - x^2 + \mathrm{o}(x^3)) &\underset{x\to 0}{=} -x^2 - \frac{(-x^2)^2}{2} + \frac{(-x^2)^3}{6} + \mathrm{o}\big((-x^2)^3\big) \\ &\underset{x\to 0}{=} -x^2 + \mathrm{o}(x^3) \end{aligned}$$

Finalement, $f(x) = \ln(2) - x^2 + \mathrm{o}(x^3)$.

(d) Quotient

Pour le quotient de deux fonctions $\dfrac{f}{g}$, on cherchera un $\mathrm{DL}_n(0)$ de f et un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{1}{g}$ puis on calculera le produit des $\mathrm{DL}_n(0)$ de f et de $\dfrac{1}{g}$. Pour obtenir le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{1}{g}$, on utilisera la composition et le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{1}{1 \pm x}$.

Exemple Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x + \cos(x)}$.

Solution. On sait que :

$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3) \qquad \text{et} \qquad \cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3)$$

donc $\mathrm{e}^x + \cos(x) \underset{x\to 0}{=} 2 + x + \dfrac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)$. Par conséquent,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2 + x + \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1/2}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} + \mathrm{o}(x^3)}$$

De plus, on sait que :

$$\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + \mathrm{o}(u^3)$$

Comme $\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^3}{12} + \mathrm{o}(x^3) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on a par composition :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^3}{12}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^3}{12}\right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^3}{12}\right)^3\right] + \mathrm{o}(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8}\right) + \mathrm{o}(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{5}{48}x^3 + \mathrm{o}(x^3) \end{aligned}$$

(e) Primitivation

Proposition Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f admet le $\mathrm{DL}_n(a)$ suivant :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \mathrm{o}\big((x-a)^n\big)$$

Alors une primitive F de f sur I admet le $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$ suivant :

$$F(x) \underset{x\to a}{=} F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + \mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big)$$

Démonstration La fonction :

$$G : x \in I \longmapsto F(x) - \left(F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1}\right)$$

est dérivable sur I et il existe une fonction $\varepsilon \in \mathbb{R}^I$ telle que $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et telle que :

$$\forall x \in I, \qquad G'(x) = F'(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}\big((x-a)^n\big) = (x-a)^n \varepsilon(x)$$

Soit $x \in I$. La fonction G est continue sur $[\min(a,x), \max(a,x)]$ et dérivable sur $]\min(a,x), \max(a,x)[$ donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c(x) \in]0,1[$ tel que :

$$G(x) - G(a) = (x-a)G'(a + (x-a)c(x))$$

Alors :

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + (x-a)^{n+1}c(x)^n \varepsilon(a + (x-a)c(x)) = \mathrm{o}\big((x-a)^{n+1}\big),$$

d'où le résultat. ∎

Exemple Déterminons le $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\arctan(x)$ en considérant sa dérivée.
La fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. On sait que :

$$\frac{1}{1+u} \underset{x\to 0}{=} 1 - u + u^2 + \mathrm{o}(u^2)$$

donc :

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 + \mathrm{o}(x^4)$$

Comme arctan est une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ telle que $\arctan(0) = 0$, on a :

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \mathrm{o}(x^5)$$

✎✎✎ **Exercice** Déterminer le DL5(0) de la fonction arcsin.

Une solution.
La fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

donc :

$$\arcsin'(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \mathrm{o}(x^4)$$

puis, en intégrant :

$$\arcsin(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \mathrm{o}(x^5)$$

(f) Calcul d'un développement limité en $a \in \mathbb{R}^*$

Pour calculer le $\mathrm{DL}_n(a)$ de f en $a \in \mathbb{R}$, on posera $x = a+h$ et on cherchera le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $h \longmapsto f(a+h)$ (dire que x est *proche* de a signifie que h est *proche* de 0).

✎✎✎ **Exercice** Déterminer le $\mathrm{DL}_3(2)$ de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.

Une solution. Posons $x = 2+h$. On a :

$$\begin{aligned} f(2+h) = \frac{1}{2+h} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{h}{2}} &\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} + \mathrm{o}(h^3)\right) \\ &\underset{h\to 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{8} - \frac{h^3}{16} + \mathrm{o}(h^3) \end{aligned}$$

Or $h = x-2$ donc :

$$f(x) \underset{x\to 2}{=} \frac{1}{2} - \frac{x-2}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-2)^3}{16} + \mathrm{o}\big((x-2)^3\big)$$

III – Comparaison de suites

On définit les relations de comparaison ($\sim$, o et $\mathcal{O}$) pour les suites (on ne compare des suites qu'au voisinage de $+\infty$). Les propriétés correspondantes sont les mêmes que pour les fonctions. Il suffit d'adapter les démonstrations.

Dans tout ce qui suit, u, v, w et x désignent des suites réelles ne s'annulant pas.

1) Définitions

Définition (relations $\sim$, o et $\mathcal{O}$) ⋆ On dit que u est négligeable devant la suite v au voisinage de $+\infty$, noté $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$, si $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

⋆ On dit que u est dominée par la suite v au voisinage de $+\infty$, noté $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$, si la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

⋆ On dit que u est équivalente à la suite v au voisinage de $+\infty$, noté $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, si $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exemple ⋆ $n^2 \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n^3)$;

⋆ $\sin(n) \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(1)$;

⋆ $\dfrac{n^3+1}{n^2+n} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$.

2) Propriétés

Proposition ⋆ Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ou si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$.

⋆ La relation $\underset{n\to+\infty}{\sim}$ est une relation d'équivalence.

⋆ Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, alors :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n \underset{n\to+\infty}{=} v_n + \mathrm{o}(v_n)$$

Proposition ⋆ Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(w_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(w_n)$, alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(w_n)$ (idem avec $\mathcal{O}$).

⋆ Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(w_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x_n)$, alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n x_n)$ (idem avec $\mathcal{O}$).

⋆ Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$, alors :

$$u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n x_n \qquad \text{et} \qquad \frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{w_n}{x_n}$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n^k \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n^k$.

Remarque : on ne peut pas ajouter/soustraire des équivalents, ni composer à gauche par une fonction dans des équivalents.

Proposition On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

(i) Si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

(ii) Si v est à valeurs strictement positives, alors v l'est également à partir d'un certain rang et :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \qquad u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$$

Pour terminer, on rappelle les équivalents usuels (version séquentielles des équivalents vus plus haut pour les fonctions).

Proposition (équivalents usuels) Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0. Alors :

(i) $\sin(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$, $\tan(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$, $\mathrm{Arctan}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$, $1 - \cos(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$, $\mathrm{Arcsin}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

(ii) $\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$, $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$, $\mathrm{sh}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$, $\mathrm{ch}(u_n) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$, $\mathrm{th}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$

(iii) pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n$ et, en particulier, $\sqrt{1+u_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{u_n}{2}$

3) La formule de Stirling

Théorème (formule de Stirling) On a l'équivalent suivant :

$$n\,! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

Démonstration Ce résultat est admis. ∎

✎✎✎ **Exercice** Déterminer un équivalent *simple* de $\dbinom{2n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Solution. En utilisant la formule de Stirling, on obtient :

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)\,!}{(n\,!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

On peut en déduit un développement asymptotique de $\ln(n\,!)$ (*i.e.* un développement limité de $\ln(n\,!)$ au voisinage de $+\infty$).

Proposition On a :

$$\ln(n\,!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + \ln\left(\sqrt{2\pi}\right) + \mathrm{o}(1)$$

Démonstration D'après la formule de Stirling, on a :

$$\frac{\mathrm{e}^n\, n\,!}{n^{n+\frac{1}{2}}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{2\pi} > 0$$

Par continuité de la fonction ln en $\sqrt{2\pi}$ et par la caractérisation séquentielle de la continuité, on a :

$$\ln\left(\frac{\mathrm{e}^n\, n\,!}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln\left(\sqrt{2\pi}\right)$$

ce que l'on peut réécrire :

$$\ln\left(\frac{\mathrm{e}^n\, n\,!}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(\sqrt{2\pi}\right) + \mathrm{o}(1)$$

c'est-à-dire :

$$\ln(n\,!) + n - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln(n) = \ln(\sqrt{2\pi}) + \mathrm{o}(1),$$

ce qu'il fallait démontrer. ∎

IV – À quoi servent les développements limités ?

Les développements limités ont de nombreuses applications ; ils permettent d'étudier en finesse le comportement d'une suite ou d'une fonction notamment.

1) À calculer der limites

✎✎✎ **Exercice** Calculer la limite $\ell = \lim_{x \to 0} \dfrac{\cos(x) - \cos(3x)}{x^2}$.

Solution. On sait que $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$ donc, comme $3x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on a aussi :

$$\cos(3x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{9x^2}{2} + \mathrm{o}(x^2)$$

puis :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - \left(1 - \frac{9x^2}{2}\right) + \mathrm{o}(x^2)}{x^2} = 4 + \mathrm{o}(1)$$

On en déduit que $\ell = 4$.

2) À déterminer la position d'une courbe par rapport à une tangente localement

✎✎✎ **Exercice** Soit $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x + \mathrm{ch}(x)}$.

1. Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de f.
2. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ en 0 ainsi que la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (T) au voisinage de 0.

3) À déterminer un extremum local

On rappelle la définition d'un maximum local.

Définition Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in I$. On dit que f admet un maximum local en a s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in I \cap [-\alpha, \alpha], \qquad f(x) \leqslant f(a)$$

On sait que si $a \in \overset{\circ}{I}$ et f est dérivable en a et admet un extremum local en a, alors a est un point critique de f, *i.e.* est tel que $f'(a) = 0$. Le résultat suivant nous donne une réciproque partielle.

Proposition Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in \overset{\circ}{I}$. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \lambda(x-a)^2 + \mathrm{o}\big((x-a)^2\big)$$

- ⋆ Si $\lambda > 0$, alors f admet un minimum local en a.
- ⋆ Si $\lambda < 0$, alors f admet un maximum local en a.

Démonstration On a $f(x) - f(a) \underset{x \to a}{\sim} \lambda(x-a)^2$, d'où le résultat puisque le signe de $x \longmapsto \lambda(x-a)^2$ au voisinage de a est déterminé par celui de λ. ■

✎✎✎ **Exercice** Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{1+x^2}$.

1. Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de f.
2. En déduire que f présente un extremum local en 0.

4) À justifier l'existence d'une asymptote oblique et à déterminer les positions relatives localement

Définition (asymptote oblique) Soient $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On dit que la droite $(D) : y = ax+b$ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ si :

$$f(x) - (ax+b) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

Pour traiter ce problème, on cherchera à déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} ax + b + \frac{c}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

On parle de *développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$ à l'ordre* 1. Pour obtenir un tel développement, on posera $x = \dfrac{1}{h}$ et on cherchera le $\mathrm{DL}_1(0)$ de la fonction $h \longmapsto f\left(\dfrac{1}{h}\right)$.

✎✎✎ **Exercice** Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$ présente une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et préciser la position de cette droite par rapport à la courbe.

Solution. Posons $x = \dfrac{1}{h}$ (h tend vers 0^+ quand x tend vers $+\infty$). Alors

$$f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{\frac{1}{h^3}+1}{\frac{1}{h^2}-1} = \frac{1+h^3}{h^3} \times \frac{h^2}{1-h^2} = \frac{1}{h} \times \frac{1+h^3}{1-h^2}$$

On sait que $\dfrac{1}{1-h^2} \underset{0}{=} 1 + h^2 + \mathrm{o}(h^2)$ donc

$$(1+h^3) \times \frac{1}{1-h^2} \underset{0}{=} (1+h^2)(1+h^2+\mathrm{o}(h^2)) = 1 + h^2 + \mathrm{o}(h^2)$$

Donc

$$f\left(\frac{1}{h}\right) \underset{0}{=} \frac{1+h^2+\mathrm{o}(h^2)}{h} = h + \frac{1}{h} + \mathrm{o}(h)$$

ce qui donne

$$f(x) \underset{+\infty}{=} x + \frac{1}{x} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ et que la courbe est au-dessus de la droite dans ce voisinage.

5) À déterminer des développements asymptotiques de suites

✎✎✎ **Exercice** Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^1 t^n \ln(1+t)\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. En déduire successivement que :

$$I_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(2)}{n+1} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{puis que} \qquad I_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln(2)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

6) Autres applications

Les développements limités permettent également d'obtenir des développements asymptotiques de suites implicites ou de suites récurrentes. On peut également déterminer des développements limités de fonctions réciproques (voir TD).