

ANALYSE ASYMPTOTIQUE

Table des matières

1	Comparaison de fonctions	2
1.1	Négligeabilité et domination	2
1.1.1	Définitions et exemples	2
1.1.2	Propriétés	3
1.2	Équivalence entre fonctions	4
1.2.1	Définition et exemples	4
1.2.2	Propriétés	4
1.3	Équivalents usuels	7
1.4	Croissances comparées	8
2	Développements limités	8
2.1	Définition	9
2.2	Premières propriétés	10
2.3	Formule de Taylor-Young	11
2.3.1	Le théorème	11
2.3.2	Les développements limités usuels en 0	11
2.4	Opérations sur les développements limités	12
2.4.1	Linéarité	12
2.4.2	Produit	13
2.4.3	Composition	13
2.4.4	Quotient	14
2.4.5	Primitivation	14
2.4.6	Calcul d'un développement limité en $a \in \mathbb{R}^*$	16
3	Comparaison de suites	16
3.1	Définitions	16
3.2	Propriétés	16
3.3	La formule de Stirling	17
4	À quoi servent les développements limités ?	18
4.1	À calculer des limites	18
4.2	À déterminer la position d'une courbe par rapport à une tangente localement	19
4.3	À déterminer un extremum local	19
4.4	À justifier l'existence d'une asymptote oblique et à déterminer les positions relatives localement	19
4.5	À déterminer des développements asymptotiques de suites	20
4.6	Autres applications	20

I – Comparaison de fonctions

L'un des objectifs de ce chapitre est de calculer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}, \quad \ell_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \quad \text{et} \quad \ell_3 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

La première limite donne lieu à la forme indéterminée « $\frac{0}{0}$ ». Pour lever cette indétermination, il s'agit de comprendre à quelle *vitesse* la fonction $x \mapsto e^x - 1 - x$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par rapport à la fonction $x \mapsto x^2$.

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point, a est un élément de \bar{I} et $f, g, h, k \in I^{\mathbb{R}}$ sont des fonctions définies sur I à valeurs réelles (voire complexes) ; on supposera par ailleurs que ces fonctions ne s'annulent pas sur I (sauf éventuellement au point a).

1) Négligeabilité et domination

(a) Définitions et exemples

Définition (négligeabilité, domination) ★ On dit que f est *négligeable devant* g au voisinage de a , noté $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$, si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

★ On dit que f est *dominée par* la fonction g au voisinage de a , noté $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \mathcal{O}(g(x))$, si la fonction $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a .

Exemple ★ On a $\ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$ car, par croissances comparées, on a $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

★ Par le même théorème, on a $\ln(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$.

★ On a $x^4 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$ (car $\frac{x^4}{x^2} = x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$) ; ceci exprime la *petitesse* de x^4 devant x^2 quand x est petit. Par contre, on a $x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^4)$; cette relation exprime l'*immensité* de x^4 par rapport à x^2 quand x est grand.

★ On a $\sin(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x)$ car $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ (produit d'une fonction bornée par une fonction qui tend vers 0).

★ On a $\sin(x) \underset{x \rightarrow 2}{=} \mathcal{O}(1)$ car :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \frac{\sin(x)}{1} = \sin(x) \leq 1$$

★ De même, $x \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(x+1)$ car :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$$

Remarque : on a

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(1) \iff f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

Exemple On a $e^{-x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(1)$.

(b) Propriétés

Proposition (i) **Transitivité des relations \mathcal{O} et o**

Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$ (même propriété pour \mathcal{O}).

Exemple Si $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$, alors comme on sait que $x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$, on a aussi $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$.

(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(\lambda g(x))$ et $\lambda f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ (même propriété pour \mathcal{O}).

On dit que les relations o et \mathcal{O} absorbent les constantes multiplicatives.

Exemple Si on sait que $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{x}{2}\right)$, alors on a aussi $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$.

(iii) Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$ et $g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$, alors $f(x) + g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$ (même propriété pour \mathcal{O}).

Exemple On a $o(x) + o(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x)$.

(iv) Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ et $h(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(k(x))$, alors $f(x)h(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)k(x))$.

Exemple Si $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$ et $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^3)$, alors $xf(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^5)$.

(v) Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$, alors $f(x)h(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)h(x))$.

Exemple Si $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^2)$, alors $xf(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^3)$.

(vi) Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \mathcal{O}(g(x))$.

Démonstration (pour la relation o) (i) En utilisant l'hypothèse, on a :

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \times 0 = 0$$

donc $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$.

(ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Comme $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, on a :

$$\frac{f(x)}{\lambda g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \quad \text{et} \quad \frac{\lambda f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

donc $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(\lambda g(x))$ et $\lambda f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$.

(iii) De la même façon :

$$\frac{f(x) + g(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{h(x)} + \frac{g(x)}{h(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 + 0 = 0$$

donc $f(x) + g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$.

(iv) On a :

$$\frac{f(x)h(x)}{g(x)k(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{h(x)}{k(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \times 0 = 0$$

donc $f(x)h(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)h(x))$.

(v) De même :

$$\frac{f(x)h(x)}{g(x)h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

donc $f(x)h(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)h(x))$.

(vi) Si f est négligeable devant la fonction g au voisinage de a , alors $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ (limite finie). La fonction $\frac{f}{g}$ est donc bornée au voisinage de a , ce qu'il fallait démontrer. ■

Exemple Admettons que $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$ et que $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$. Alors :

$$\begin{aligned} e^x \sin(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) + 2x o(x) + o(x) \times o(x) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) + o(x^2) + o(x^2) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) \end{aligned}$$

2) Équivalence entre fonctions

(a) Définition et exemples

Définition (fonctions équivalentes) On dit que f est équivalente à g au voisinage de a , noté $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Exemple ★ On a $x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ car :

$$\frac{x + 1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

★ On a $x^{2023} + x^2 + 5x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 5x$ car :

$$\frac{x^{2023} + x^2 + 5x}{5x} = \frac{x^{2022}}{5} + \frac{x}{5} + 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

★ On sait également que $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

(b) Propriétés

Proposition La relation « être équivalente à » est une relation d'équivalence.

Démonstration ★ **Réflexivité** : on a clairement $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$.

★ **Symétrie** : si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, alors

$$\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{1}{1} = 1$$

donc $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$.

★ **Transitivité** : supposons que $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et que $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$. Alors :

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1 \times 1 = 1$$

donc $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$.

La relation « être équivalente à » est donc bien une relation d'équivalence. ■


Proposition On suppose que $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et que $h(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} k(x)$. Alors :

- (i) $f(x)h(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)k(x)$;
- (ii) $\frac{1}{f(x)} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{1}{g(x)}$;
- (iii) $\frac{f(x)}{h(x)} \underset{x \rightarrow a}{\sim} \frac{g(x)}{k(x)}$;
- (iv) $|f(x)| \underset{x \rightarrow a}{\sim} |g(x)|$;
- (v) si $\ell \in \mathbb{R}^*$, alors

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \iff f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ell$$

Démonstration Il suffit d'écrire la définition. ■

Exemple Comme $e^x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$, on a $e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$.

 **Exercice** En admettant que $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$ et que $1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$, calculer la limite :

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{1 - \cos(x)}$$

Solution. Soit $f : x \mapsto \frac{x(e^x - 1)}{1 - \cos(x)}$. Par produit et quotient d'équivalents, on a :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x \times x}{\frac{x^2}{2}} = 2$$

donc (propriété (v) ci-dessus) $L = \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 2$.

Proposition On a :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(g(x))$$

Démonstration En effet :

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(g(x)) &\iff f(x) - g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)) \iff \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \\ &\iff \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \\ &\iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1 \\ &\iff f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \end{aligned}$$
■

Exemple ★ On a $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x)$.

★ Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R}$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \ell + o(1)$. Par exemple, $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + o(1)$.

ATTENTION : la relation $\underset{x \rightarrow a}{\sim}$ n'est pas compatible avec l'addition (/soustraction) !

Exemple On a $x - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x + 1$ et $-x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x$ mais $-1 \not\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1$.

Proposition (limite et signe) On suppose que $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$.

(i) Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

(ii) Si g est à valeurs strictement positives au voisinage de a , alors f est à valeurs strictement positives au voisinage de a et :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad f(x)^\alpha \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)^\alpha$$

Démonstration (i) On a :

$$f(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \times g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1 \times \ell = \ell$$


(ii) On a $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1 > 0$ donc la fonction $\frac{f}{g}$ est à valeurs strictement positives au voisinage de a . Par produit, la fonction $f = \frac{f}{g} \times g$ est à valeurs strictement positives au voisinage de a . De plus :

$$\frac{f(x)^\alpha}{g(x)^\alpha} = \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow a} 1^\alpha = 1$$

donc $f(x)^\alpha \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)^\alpha$. ■

Exemple ★ Si on sait que $f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{1}{x}$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$.

★ On a $\sqrt{x^4 + 3x^2 + 1} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$.

 **Exercice (vrai ou faux ?)** Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, a-t-on nécessairement $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$?

Le résultat suivant est très utilisé en pratique.

Proposition (principe de substitution) Soit $\varphi \in I^J$ et $b \in \overline{J}$. On suppose que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \quad \text{et que} \quad \lim_{x \rightarrow b} \varphi(x) = a$$

Alors :


$$f(\varphi(x)) \underset{x \rightarrow b}{\sim} g(\varphi(x))$$

Démonstration D'après le théorème de composition des limites, on a :

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(\varphi(x))}{g(\varphi(x))} = \lim_{y \rightarrow a} \frac{f(y)}{g(y)} = 1,$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

Exemple En admettant que $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, on a $e^{\frac{1}{x}} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ car $\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

 **Exercice** Déterminer la limite $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin(e^{-x})}$ en admettant que :

$$1 - \cos(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t^2}{2} \quad \text{et} \quad \sin(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$$

ATTENTION : il est interdit de composer à gauche avec les équivalents.

Exemple On a $x + 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ mais $e^{x+1} \not\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$.

Proposition (lien entre \mathcal{O} , o et \sim) (i) On suppose que $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ et que $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$. Alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(h(x))$ (même propriété en remplaçant o par \mathcal{O}).

(ii) Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \mathcal{O}(g(x))$.

Démonstration (i) On a :

$$\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \times \frac{g(x)}{h(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1 \times 0 = 0,$$

d'où la relation annoncée.

(ii) Par hypothèse, la fonction $\frac{f}{g}$ tend vers 1 (limite finie) quand x tend vers a donc cette fonction est bornée au voisinage de a . ■

3) Équivalents usuels

Proposition (équivalents usuels) Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq p$ et $a_n, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ tels que $a_n \neq 0$ et $a_p \neq 0$. Alors :

$$\sum_{k=n}^p a_k x^k \underset{x \rightarrow 0}{\sim} a_n x^n \quad \text{et} \quad \sum_{k=n}^p a_k x^k \underset{x \rightarrow \pm \infty}{\sim} a_p x^p$$

On dispose des équivalents suivants en 0 :

- (i) $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
- (ii) $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
- (iii) $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \alpha x$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et, en particulier, $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$
- (iv) $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
- (v) $1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$
- (vi) $\text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
- (vii) $\text{ch}(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$
- (viii) $\text{th}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
- (ix) $\arcsin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
- (x) $\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$
- (xi) $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$


Démonstration Hormis les points (v) et (vii), tous les équivalents découlent de la dérivabilité en 0 de la fonction usuelle mise en jeu. Par exemple pour (iii), si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, alors la fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est dérivable en 0 (car dérivable sur $] -1, +\infty[$) et :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} f'(0) = \alpha$$

d'où l'équivalent annoncée. Pour le point (v), on a :

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2 \frac{x^2/4}{x^2} = \frac{1}{2}$$

On procède de la même manière pour le point (vii). ■

 **Exercice** Déterminer les limites suivantes :

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) \frac{e^{x^2} - 1}{\cos(x) - 1} \quad \text{et} \quad \ell_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 + x^2 - 2x}}{\sqrt[3]{8x^3 + 12x + 9}}$$

Proposition (théorème des gendarmes pour les équivalents) On suppose ici que les fonctions f, g et h sont à valeurs dans \mathbb{R}_+^* . Par ailleurs, si :

★ $\forall x \in I, \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x);$

★ $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x).$

Alors $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x).$

Démonstration Pour tout $x \in I$, on a en divisant par $f(x) > 0$ dans les inégalités :

$$\forall x \in I, \quad 1 \leq \frac{g(x)}{f(x)} \leq \frac{h(x)}{f(x)}$$

d'où le résultat d'après le théorème des gendarmes. ■

Exemple Considérons une fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x > 0, \quad x \leq f(x) \leq x + \sqrt{x} - \ln(x)$$

Comme $x + \sqrt{x} - \ln(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$, le résultat précédent implique que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$.

4) Croissances comparées

On peut reformuler les croissances comparées à l'aide de la négligeabilité.

Proposition (croissances comparées) Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$.

★ Au voisinage de $+\infty$:

$$\ln(x)^\alpha \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(x^\beta) \quad \text{et} \quad x^\beta \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(e^{\gamma x})$$

★ Au voisinage de 0^+ :

$$\ln(x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0^+}{=} o\left(\frac{1}{x^\beta}\right)$$

Démonstration Il s'agit simplement d'une réécriture des croissances comparées bien connues. ■

II – Développements limités

Dans cette partie, on considère $a \in \mathbb{R}$ et f est une fonction définie au voisinage de a .

1) Définition

Définition (développement limité) Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un *développement limité* à l'ordre n au voisinage de a (en abrégé « f admet un $DL_n(a)$ ») s'il existe $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n c_k (x - a)^k + o((x - a)^n),$$

i.e. :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^n c_k (x - a)^k}{(x - a)^n} = 0$$

Le polynôme $T_{n,f,a} = \sum_{k=0}^n c_k (X - a)^k$ est appelé *partie régulière* du $DL_n(a)$ de f .

Exemple ★ Exemple de $DL_1(0)$: $1 - x + x^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + o(x)$

Pour obtenir un DL en 0 d'un polynôme, il suffit donc de *tronquer* le polynôme à l'ordre voulu.

★ Exemple de $DL_1(1)$: $2 + x \underset{1}{=} 3 + (x - 1) + o(x - 1)$.

★ Dans le chapitre sur la dérivation, on a vu que $f \in \mathbb{R}^I$ est dérivable en $a \in I$ si et seulement si :

$$(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^I, \exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in I, f(x) = f(a) + \lambda(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)) \quad \text{et} \quad \varepsilon(x) \underset{x \rightarrow a}{\longrightarrow} 0$$

Autrement dit, f est dérivable en a si et seulement si f admet un $DL_1(a)$.

★ Parmi les DL à connaître, le plus « simple » est le suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{1 - x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$$

Soient en effet $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$. Alors :

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^{n+1}}{1 - x}$$

donc :

$$\frac{1}{1 - x} = \sum_{k=0}^n x^k + \frac{x^{n+1}}{1 - x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$$

Remarques.

★ L'intérêt est d'approximer la fonction au voisinage d'un point par un polynôme.

★ Pour $a = 0$, dire que f admet un $DL_n(0)$ signifie qu'il existe $c_0, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + o(x^n)$$

★ Un développement limité en un point peut aussi donner une indication sur le signe de la fonction au voisinage du point.

Exemple Supposons que $f(x) \underset{x \rightarrow 2}{=} 2(x - 2)^2 + o(x - 2)^2$, alors :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 2}{\sim} 2(x - 2)^2$$

et donc f est positive au voisinage de 2, ce qui signifie qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f \geq 0$ sur l'intervalle $[2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon]$.

2) Premières propriétés

Proposition (unicité des coefficients) Si une fonction f admet un $DL_n(a)$, alors les coefficients de la partie régulière sont uniquement déterminés.

Démonstration Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe deux familles $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, distinctes, telles que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n b_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Par soustraction, il vient :

$$\sum_{k=0}^n (a_k - b_k)(x-a)^k \underset{x \rightarrow a}{=} o((x-a)^n)$$

Comme les deux familles sont distinctes, on peut définir $k_0 = \min \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket \mid a_k \neq b_k\}$. Alors :

$$\sum_{k=0}^n (a_k - b_k)(x-a)^k \underset{x \rightarrow a}{\sim} (a_{k_0} - b_{k_0})(x-a)^{k_0}$$

et alors $(a_{k_0} - b_{k_0})(x-a)^{k_0} \underset{x \rightarrow a}{=} o((x-a)^n)$, ce qui est absurde car $k_0 \leq n$. ■

Proposition Soit f une fonction définie au voisinage de 0 admettant un $DL_n(0)$ (où $n \in \mathbb{N}$).

- ★ Si f est paire, alors la partie régulière du DL ne comporte que des monômes de degrés pairs.
- ★ Si f est impaire, alors la partie régulière du DL ne comporte que des monômes de degrés impairs.

Démonstration Supposons que f soit paire et notons :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

le $DL_n(0)$ de f . Par composition des limites, on peut écrire que :

$$f(x) = f(-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k (-1)^k x^k + o(x^n)$$

et donc, par unicité des coefficients d'un développement limité, on obtient que $a_k = 0$ si $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ est un entier impair. C'est le même raisonnement dans le cas impair. ■

Proposition (troncature) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f admet le $DL_n(a)$ suivant :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n),$$

alors, pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la fonction f admet le $DL_p(a)$ suivant :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^p a_k (x-a)^k + o((x-a)^p),$$

Démonstration Il suffit de remarquer que :

$$\sum_{k=p+1}^n a_k(x-a)^k \underset{x \rightarrow a}{=} o((x-a)^p)$$

Exemple Par exemple, si $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x - x^2 + 4x^3 + o(x^5)$, alors le $DL_2(0)$ de f est $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x - x^2 + o(x^2)$.

3) Formule de Taylor-Young

(a) Le théorème

On sait que, si une fonction admet un $DL_n(a)$, alors ce développement est uniquement déterminé. Le résultat suivant précise la valeur des coefficients et justifie l'existence du DL lorsque la fonction est suffisamment régulière.

Théorème (formule de Taylor-Young) Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction de classe \mathcal{C}^n au voisinage de a . Alors f admet un $DL_n(a)$ qui est donné par :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Démonstration Elle est admise à ce stade. On la justifiera à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral. ■

Remarque : en particulier, si f est de classe \mathcal{C}^n au voisinage de 0, alors f admet pour $DL_n(0)$:

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$$

(b) Les développements limités usuels en 0

Les fonctions usuelles sont de classe \mathcal{C}^∞ sur leur domaine de dérivabilité, on peut donc écrire des DL à tout ordre. Fixons $n \in \mathbb{N}$.

★ On sait déjà que :

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$$

De la même façon, on peut montrer que :

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$$

★ Considérons la fonction $f : x \mapsto e^x$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f^{(k)}(0) = f(0) = 1$ donc (formule de Taylor-Young) :

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$$

★ En considérant les dérivées successives ainsi que la formule de Taylor-Young, on peut aussi obtenir les développements limités suivants (à connaître) :

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

et :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$$

et :

$$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

et :

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

et :

$$\operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$$

et :

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$$

et :

$$\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2})$$

et :

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Remarque : en tronquant à l'ordre 1 ou 2 les développements limités, on retrouve les équivalents usuels. Par exemple, $e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + o(x)$, ce qui signifie exactement que $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$.

4) Opérations sur les développements limités

(a) Linéarité


Proposition Soient f et g admettant des $DL_n(0)$ tels que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n c_k x^k + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n d_k x^k + o(x^n)$$

et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$. Alors la fonction $\alpha f + \beta g$ admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (\alpha c_k + \beta d_k) x^k + o(x^n)$$

Démonstration Il suffit de faire le calcul. ■

 **Exercice** Déterminer un $DL_4(0)$ de $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

(b) **Produit**

Proposition Soient f et g admettant des $DL_n(0)$ tels que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n c_k x^k + o(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n d_k x^k + o(x^n)$$

Alors la fonction fg admet un $DL_n(0)$ donné par :

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$$

où :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad a_k = \sum_{i=0}^k c_i d_{k-i}$$

Démonstration Il suffit de faire le calcul. ■

Exemple Donner le $DL_3(0)$ de $f(x) = \frac{\cos(x)}{1-x}$.

Solution. On sait que

$$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$$

donc, en développant le produit, on obtient :

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

(c) **Composition**

Proposition Soit f définie sur I contenant 0 admettant un $DL_n(0)$ et g définie sur J contenant 0 admettant un $DL_n(0)$. On suppose que $f(I) \subset J$ et que $f(0) = 0$. Alors $g \circ f$ admet un $DL_n(0)$.

Démonstration admis ■

En pratique, pour obtenir le $DL_n(0)$ de $g \circ f$, on écrit le $DL_n(0)$ de f ($f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n)$) et celui de g puis on substitue le $DL_n(0)$ de f à x dans $g(x)$ (il est essentiel que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$).

Exemple Déterminer le $DL_3(0)$ de $f(x) = e^{\sin(x)}$.

Solution. On sait que :

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{et} \quad e^u \underset{0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$$

Comme $\sin(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} & 1 + \left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3}{6} + o(x^3) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} & 1 + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

d'où :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

 **Exercice** Déterminer le $DL_3(0)$ de $f(x) = \ln(1 + \cos(2x))$.

Solution. On sait que

$$\cos(2x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - 2x^2 + o(x^3) \quad \text{donc} \quad 1 + \cos(2x) = 2 - 2x^2 + o(x^3) = 2(1 - x^2 + o(x^3))$$

De plus :

$$\ln(1 + u) \underset{0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)$$

On a :

$$f(x) = \ln(2) + \ln(1 - x^2 + o(x^3))$$

Comme $-x^2 + o(x^3) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, on a par composition :

$$\begin{aligned} \ln(1 - x^2 + o(x^3)) &\underset{x \rightarrow 0}{=} -x^2 - \frac{(-x^2)^2}{2} + \frac{(-x^2)^3}{6} + o((-x^2)^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} -x^2 + o(x^3) \end{aligned}$$

Finalement, $f(x) = \ln(2) - x^2 + o(x^3)$.

(d) Quotient

Pour le quotient de deux fonctions $\frac{f}{g}$, on cherchera un $DL_n(0)$ de f et un $DL_n(0)$ de $\frac{1}{g}$ puis on calculera le produit des $DL_n(0)$ de f et de $\frac{1}{g}$. Pour obtenir le $DL_n(0)$ de $\frac{1}{g}$, on utilisera la composition et le $DL_n(0)$ de $\frac{1}{1 \pm x}$.

Exemple Déterminer le $DL_3(0)$ de $f(x) = \frac{1}{e^x + \cos(x)}$.

Solution. On sait que :

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{et} \quad \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

donc $e^x + \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 2 + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Par conséquent,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2 + x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1/2}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)}$$

De plus, on sait que :

$$\frac{1}{1 + u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$$

Comme $\frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} + o(x^3) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, on a par composition :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} \right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} \right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} \right)^3 \right] + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} \right) + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} - \frac{5}{48}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

(e) Primitivation

Proposition Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f admet le $DL_n(a)$ suivant :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \sum_{k=0}^n a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Alors une primitive F de f sur I admet le $DL_{n+1}(a)$ suivant :

$$F(x) \underset{x \rightarrow a}{=} F(a) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1})$$

Démonstration La fonction :

$$G : x \in I \mapsto F(x) - \left(F(a) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1} \right)$$

est dérivable sur I et il existe une fonction $\varepsilon \in \mathbb{R}^I$ telle que $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et telle que :

$$\forall x \in I, \quad G'(x) = F'(x) - \sum_{k=0}^n a_k x^k \underset{x \rightarrow a}{=} o((x-a)^n) = (x-a)^n \varepsilon(x)$$

Soit $x \in I$. La fonction G est continue sur $[\min(a, x), \max(a, x)]$ et dérivable sur $] \min(a, x), \max(a, x)[$ donc, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c(x) \in]0, 1[$ tel que :

$$G(x) - G(a) = (x-a)G'(a + (x-a)c(x))$$

Alors :

$$F(x) = F(a) + \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} (x-a)^{k+1} + (x-a)^{n+1} c(x)^n \varepsilon(a + (x-a)c(x)) = o((x-a)^{n+1}),$$

d'où le résultat. ■

Exemple Déterminons le $DL_5(0)$ de $\arctan(x)$ en considérant sa dérivée.

La fonction \arctan est définie sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. On sait que :

$$\frac{1}{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - u + u^2 + o(u^2)$$

donc :

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$$

Comme \arctan est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ telle que $\arctan(0) = 0$, on a :

$$\arctan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

 **Exercice** Déterminer le $DL_5(0)$ de la fonction \arcsin .

Une solution.

La fonction \arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$ et, pour tout $x \in] -1, 1[$,

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

donc :

$$\arcsin'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)$$

puis, en intégrant :

$$\arcsin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)$$

(f) Calcul d'un développement limité en $a \in \mathbb{R}^*$

Pour calculer le $DL_n(a)$ de f en $a \in \mathbb{R}$, on posera $x = a + h$ et on cherchera le $DL_n(0)$ de $h \mapsto f(a + h)$ (dire que x est proche de a signifie que h est proche de 0).

 **Exercice** Déterminer le $DL_3(2)$ de $f : x \mapsto \frac{1}{x}$.

Une solution. Posons $x = 2 + h$. On a :

$$\begin{aligned} f(2+h) &= \frac{1}{2+h} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{h}{2}} \underset{h \rightarrow 0}{=} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} + o(h^3) \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{8} - \frac{h^3}{16} + o(h^3) \end{aligned}$$

Or $h = x - 2$ donc :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 2}{=} \frac{1}{2} - \frac{x-2}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-2)^3}{16} + o((x-2)^3)$$

III – Comparaison de suites

On définit les relations de comparaison (\sim , o et \mathcal{O}) pour les suites (on ne compare des suites qu'au voisinage de $+\infty$). Les propriétés correspondantes sont les mêmes que pour les fonctions. Il suffit d'adapter les démonstrations.

Dans tout ce qui suit, u, v, w et x désignent des suites réelles ne s'annulant pas.

1) Définitions

Définition (relations \sim , o et \mathcal{O}) ★ On dit que u est négligeable devant la suite v au voisinage de $+\infty$, noté $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$, si $\frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

★ On dit que u est dominée par la suite v au voisinage de $+\infty$, noté $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$, si la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

★ On dit que u est équivalente à la suite v au voisinage de $+\infty$, noté $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, si $\frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$.

Exemple ★ $n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(n^3)$;

★ $\sin(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(1)$;

★ $\frac{n^3 + 1}{n^2 + n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

2) Propriétés

Proposition ★ Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ ou si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$, alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$.

★ La relation $\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim}$ est une relation d'équivalence.

★ Soient $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, alors :

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n \iff u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} v_n + o(v_n)$$

Proposition ★ Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$, alors $u_n + v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$ (idem avec \mathcal{O}).

★ Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(w_n)$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(x_n)$, alors $u_n v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n x_n)$ (idem avec \mathcal{O}).

★ Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n$ et $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x_n$, alors :

$$u_n v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n x_n \quad \text{et} \quad \frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{w_n}{x_n}$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n^k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} w_n^k$.

Remarque : on ne peut pas ajouter/soustraire des équivalents, ni composer à gauche par une fonction dans des équivalents.

Proposition On suppose que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

(i) Si $v_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

(ii) Si v est à valeurs strictement positives, alors v l'est également à partir d'un certain rang et :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad u_n^\alpha \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n^\alpha$$

Pour terminer, on rappelle les équivalents usuels (version séquentielles des équivalents vus plus haut pour les fonctions).

Proposition (équivalents usuels) Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0. Alors :

(i) $\sin(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$, $\tan(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$, $\text{Arctan}(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$, $1 - \cos(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$,
 $\text{Arcsin}(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$

(ii) $\ln(1 + u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$, $e^{u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$, $\text{sh}(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$, $\text{ch}(u_n) - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n^2}{2}$, $\text{th}(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$

(iii) pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(1 + u_n)^\alpha - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha u_n$ et, en particulier, $\sqrt{1 + u_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{u_n}{2}$

3) La formule de Stirling

Théorème (formule de Stirling) On a l'équivalent suivant :

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Démonstration Ce résultat est admis. ■

 **Exercice** Déterminer un équivalent *simple* de $\binom{2n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Solution. En utilisant la formule de Stirling, on obtient :

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

On peut en déduire un développement asymptotique de $\ln(n!)$ (*i.e.* un développement limité de $\ln(n!)$ au voisinage de $+\infty$).

Proposition On a :

$$\ln(n!) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + \ln(\sqrt{2\pi}) + o(1)$$

Démonstration D'après la formule de Stirling, on a :

$$\frac{e^n n!}{n^{n+\frac{1}{2}}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi} > 0$$

Par continuité de la fonction \ln en $\sqrt{2\pi}$ et par la caractérisation séquentielle de la continuité, on a :

$$\ln\left(\frac{e^n n!}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \ln(\sqrt{2\pi})$$

ce que l'on peut réécrire :

$$\ln\left(\frac{e^n n!}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln(\sqrt{2\pi}) + o(1)$$

c'est-à-dire :


$$\ln(n!) + n - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln(n) = \ln(\sqrt{2\pi}) + o(1),$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

IV – À quoi servent les développements limités ?

Les développements limités ont de nombreuses applications ; ils permettent d'étudier en finesse le comportement d'une suite ou d'une fonction notamment.

1) À calculer des limites

 **Exercice** Calculer la limite $\ell = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \cos(3x)}{x^2}$.

Solution. On sait que $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donc, comme $3x \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$, on a aussi :

$$\cos(3x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)$$

puis :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1 - \frac{x^2}{2} - \left(1 - \frac{9x^2}{2}\right) + o(x^2)}{x^2} = 4 + o(1)$$

On en déduit que $\ell = 4$.

2) À déterminer la position d'une courbe par rapport à une tangente localement

  **Exercice** Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x + \operatorname{ch}(x)}$.

1. Déterminer le $DL_2(0)$ de f .
2. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe \mathcal{C}_f en 0 ainsi que la position relative de \mathcal{C}_f par rapport à (T) au voisinage de 0.

3) À déterminer un extremum local

On rappelle la définition d'un maximum local.

Définition Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in I$. On dit que f admet un maximum local en a s'il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in I \cap [-\alpha, \alpha], \quad f(x) \leq f(a)$$

On sait que si $a \in \overset{\circ}{I}$ et f est dérivable en a et admet un extremum local en a , alors a est un point critique de f , *i.e.* est tel que $f'(a) = 0$. Le résultat suivant nous donne une réciproque partielle.

Proposition Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in \overset{\circ}{I}$. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \lambda(x - a)^2 + o((x - a)^2)$$

- ★ Si $\lambda > 0$, alors f admet un minimum local en a .
- ★ Si $\lambda < 0$, alors f admet un maximum local en a .

Démonstration On a $f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \lambda(x - a)^2$, d'où le résultat puisque le signe de $x \mapsto \lambda(x - a)^2$ au voisinage de a est déterminé par celui de λ . ■

  **Exercice** Soit $f : x \mapsto \frac{\cos(x)}{1 + x^2}$.

1. Déterminer le $DL_2(0)$ de f .
2. En déduire que f présente un extremum local en 0.

4) À justifier l'existence d'une asymptote oblique et à déterminer les positions relatives localement


Définition (asymptote oblique) Soient $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. On dit que la droite $(D) : y = ax + b$ est asymptote à la courbe \mathcal{C}_f au voisinage de $+\infty$ si :

$$f(x) - (ax + b) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Pour traiter ce problème, on cherchera à déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On parle de *développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$ à l'ordre 1*. Pour obtenir un tel développement, on posera $x = \frac{1}{h}$ et on cherchera le $DL_1(0)$ de la fonction $h \mapsto f\left(\frac{1}{h}\right)$.

 **Exercice** Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$ présente une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et préciser la position de cette droite par rapport à la courbe.

Solution. Posons $x = \frac{1}{h}$ (h tend vers 0^+ quand x tend vers $+\infty$). Alors

$$f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{\frac{1}{h^3} + 1}{\frac{1}{h^2} - 1} = \frac{1 + h^3}{h^3} \times \frac{h^2}{1 - h^2} = \frac{1}{h} \times \frac{1 + h^3}{1 - h^2}$$

On sait que $\frac{1}{1 - h^2} \underset{0}{=} 1 + h^2 + o(h^2)$ donc

$$(1 + h^3) \times \frac{1}{1 - h^2} \underset{0}{=} (1 + h^2)(1 + h^2 + o(h^2)) = 1 + h^2 + o(h^2)$$

Donc

$$f\left(\frac{1}{h}\right) \underset{0}{=} \frac{1 + h^2 + o(h^2)}{h} = h + \frac{1}{h} + o(h)$$

ce qui donne

$$f(x) \underset{+\infty}{=} x + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe \mathcal{C}_f au voisinage de $+\infty$ et que la courbe est au-dessus de la droite dans ce voisinage.

5) À déterminer des développements asymptotiques de suites

 **Exercice** Pour tout entier naturel n , on pose :

$$I_n = \int_0^1 t^n \ln(1 + t) dt$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{\ln(2)}{n + 1} - \frac{1}{n + 1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1 + t} dt$$

2. Montrer que $\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1 + t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

3. En déduire successivement que :

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\ln(2)}{n + 1} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{puis que} \quad I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\ln(2)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

6) Autres applications

Les développements limités permettent également d'obtenir des développements asymptotiques de suites implicites ou de suites récurrentes. On peut également déterminer des développements limités de fonctions réciproques (voir TD).