

ÉLÉMENTS DE LOGIQUE ET DE RAISONNEMENT

I – Quelques notions de logique élémentaire

1) Assertions mathématiques

Définition Une *assertion* est un énoncé mathématique qui est soit vrai soit faux (pas les deux à la fois).

On associe à une assertion une valeur de vérité : V (vraie) ou F (fausse).

- Exemple**
1. P : « $2 + 1 = 4$ » (F)
 2. Q : « $\pi \in \mathbb{N}$ » (F)
 3. R : « la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} » (V)

Faire des mathématiques, c'est énoncer et démontrer des assertions vraies, que l'on appelle alors des *propositions*.

Définition (vocabulaire)

- ★ Un *théorème* est une proposition importante.
- ★ Un *corollaire* est une conséquence (plus ou moins) directe d'un théorème.
- ★ Un *lemme* est une proposition intermédiaire permettant de démontrer un théorème.
- ★ Un *axiome* est une assertion que l'on décide vraie.

2) Opérations sur les assertions

Il existe cinq connecteurs logiques qui permettent de construire de nouvelles assertions à partir d'assertions existantes : la *négation*, *ou*, *et*, l'*implication* (\implies) et l'*équivalence* (\iff).

★ Opérateur NON

Définition Soit P une assertion. L'assertion contraire (ou la négation) de P est la proposition **non P** telle que :

- non P est fausse quand P est vraie
- non P est vraie quand P est fausse

On résume les valeurs de l'assertion non P (vraie ou fausse) dans une table de vérité.

P	non P
V	F
F	V

★ Opérateur ET

Définition (conjonction de deux assertions) Soient P et Q deux assertions. On définit l'assertion (P et Q) par :

- (P et Q) est vraie si P et Q sont vraies toutes les deux ;
- (P et Q) est fausse sinon.

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple ★ (« $3 > 0$ ») et (« π est un entier ») est fausse ;

★ ($1 + 1 = 2$) et (la fonction inverse est décroissante sur $[1, 2]$) est vraie.

★ Opérateur OU

Définition (disjonction de deux assertions) Soient P et Q deux assertions. On définit l'assertion (P ou Q) par :

- (P ou Q) est vraie si au moins l'une des deux assertions P ou Q est vraie ;
- (P ou Q) est fausse sinon.

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarque. Le « ou » mathématique n'est pas exclusif. Si les deux propositions P et Q sont vraies, alors la proposition (P ou Q) est vraie. Ceci est à comparer avec le « ou » dans l'expression *fromage ou dessert*.

Exemple 1. (« la fonction \ln est croissante ») ou (« $1 < 0$ ») est vraie.

2. (« $2 + 1 = 4$ ») ou (« π est un entier ») est fausse.

★ L'opérateur IMPLICATION (\implies)

Définition Soient P et Q deux assertions. L'assertion $(P \implies Q)$ (à lire « P implique Q ») est définie comme étant l'assertion $(\text{non } P) \text{ ou } Q$.

- $(P \implies Q)$ est fausse si Q est fausse et P est vraie ;
- $(P \implies Q)$ est vraie sinon.

P	Q	$P \implies Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque : on notera que si P est fausse, alors $(P \implies Q)$ est toujours vraie.

Exemple 1. $(1 = 2) \implies (3 = 4)$ est vraie.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

- $(x > 3) \implies (x^2 > 9)$ est vraie ;
- $(x^2 > 9) \implies (x > 3)$ est fausse.

3. $(2 < 0) \implies$ (J'ai mangé une pomme hier à 21h.) est vraie.

Remarque. Lorsque $(P \implies Q)$ est vraie, on dit que Q est une **condition nécessaire** à P (car on ne peut avoir P que si on a Q) et que Q est une **condition suffisante** à P (puisqu'il suffit d'avoir P pour avoir Q).

Exemple 1. « Pour faire une tarte tatin, il faut des pommes. » (vrai)
condition nécessaire

2. « Il suffit d'avoir des pommes pour faire une tarte tatin. » (faux)

3. « Pour qu'un parallélogramme soit un rectangle, il suffit qu'il ait un angle droit. » (vrai)
condition suffisante

★ **Opérateur ÉQUIVALENCE** (\iff)

La notion d'équivalence pour les assertions correspond à la notion d'égalité pour les nombres.

Définition Soient P et Q deux assertions. On définit l'assertion $(P \iff Q)$ par

- $(P \iff Q)$ est vraie si les deux assertions ont la même valeur (toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses) ;
- $(P \iff Q)$ est fausse sinon.

Lorsque $(P \iff Q)$ est vraie, on dit que les assertions P et Q sont *équivalentes*.

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- Exemple**
1. $(1 = 2) \iff (3 < 0)$
 2. $P : \langle x = 1 \rangle$ et $Q : \langle x^2 = 1 \rangle$ ne sont pas équivalentes.
 3. $P : \langle e^x = e^y \rangle$ et $Q : \langle x = y \rangle$ sont équivalentes.
 4. $P : \langle \text{le triangle } ABC \text{ est rectangle en } A \rangle$ et $Q : \langle AB^2 + AC^2 = BC^2 \rangle$ sont équivalentes.
 5. $P : \langle x > 0 \rangle$ et $Q : \langle x^2 > 0 \rangle$ ne sont pas équivalentes.
 6. $(1 = 0) \iff (2 \text{ est impair})$

 **Exercice** Soient P et Q deux assertions. Montrer que :

$$(P \implies Q) \iff ((\text{non } P) \text{ ou } Q)$$

3) Propriétés des opérateurs NON, ET, OU, \implies et \iff

Toutes les propriétés qui suivent sont intuitives. On les démontre facilement en utilisant les tables de vérité.

Proposition Soient P, Q et R trois propositions.

- **idempotence** : $(P \text{ et } P) \iff P, (P \text{ ou } P) \iff P$
- **double négation** : $\text{non}(\text{non } P) \iff P$
- **commutativité du et** : $(P \text{ et } Q) \iff (Q \text{ et } P)$
- **commutativité du ou** : $(P \text{ ou } Q) \iff (Q \text{ ou } P)$
- **associativité du et** : $P \text{ et } (Q \text{ et } R) \iff (P \text{ et } Q) \text{ et } R$ (on n'a donc pas besoin de parenthèses lorsqu'on a plusieurs *et* consécutifs)
- **associativité du ou** : $P \text{ ou } (Q \text{ ou } R) \iff (P \text{ ou } Q) \text{ ou } R$ (on n'a donc pas besoin de parenthèses lorsqu'on a plusieurs *ou* consécutifs)
- **distributivité du et sur le ou** : $(P \text{ ou } Q) \text{ et } R \iff (P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)$ (en analogie avec la distributivité de $+$ par rapport à \times pour les nombres)
- **distributivité du ou sur le et** : $(P \text{ et } Q) \text{ ou } R \iff (P \text{ ou } R) \text{ et } (Q \text{ ou } R)$
- **négation d'une implication** : $\text{non}(P \implies Q) \iff (P \text{ et } \text{non}(Q))$
- **transitivité de \implies** : $(P \implies Q) \text{ et } (Q \implies R) \iff (P \implies R)$

Démonstration (de la distributivité du *et* sur le *ou*) On utilise des tables de vérité pour démontrer chaque propriété. On commence par la table de vérité de la proposition $(P \text{ ou } Q) \text{ et } R$.

P	Q	R	P ou Q	(P ou Q) et R
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

On écrit maintenant la table de vérité de $(P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)$.

P	Q	R	P et R	Q et R	(P et R) ou (Q et R)
V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F
V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F

On constate que les dernières colonnes des deux tables de vérités sont les mêmes. Ceci signifie que les deux propositions $[(P \text{ ou } Q) \text{ et } R]$ et $[(P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)]$ sont équivalentes. ■

Proposition (lois de De Morgan) Soient P et Q deux assertions. Alors :

1. $\text{non } (P \text{ et } Q) \iff (\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$
2. $\text{non } (Q \text{ ou } P) \iff (\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$

Démonstration

 **Exercice** Donner l'événement contraire de chacun des événements suivants.

1. « $-1 < x \leq 3$ »
2. « Au moins un élève de la classe a les yeux verts » ou « j'ai faim »

Remarques. Soient P et Q deux propositions. La négation de $P \implies Q$ est $[P \text{ et } (\text{non } Q)]$.

Proposition (lien entre implication et équivalence) Soient P et Q deux propositions. Alors P est équivalente à Q si et seulement si P implique Q et Q implique P.

$$(P \iff Q) \iff [(P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P)]$$

Démonstration en exercice ■

II – Les quantificateurs universel \forall et existentiel \exists


1) Définition

- Définition**
- Le quantificateur universel \forall signifie « pour tout » ou « quel que soit ».
 - Le quantificateur existentiel \exists signifie « il existe au moins ».
 - On peut aussi utiliser $\exists!$ qui signifie « il existe un unique ».

Exemple $\star \forall x \in]-\infty, \sqrt{3}], x^2 \geq 3$

$\star \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists m \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{m} < 10^{-n}$

$$\star \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n + 1$$

 **Exercice** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Traduire avec des quantificateurs les énoncés suivants.

1. La fonction f est strictement positive sur $[0, 1]$.
2. La fonction f s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $[0, 1]$.
3. La fonction f est nulle sur \mathbb{R} .
4. Tout élément de \mathbb{R}_+^* admet un unique antécédent par l'application f dans \mathbb{R} .

2) Négation

Attention aux négations des phrases quantifiées.

Proposition Soient E un ensemble et, pour tout $x \in E$, soit $P(x)$ une assertion portant sur l'élément x de E (on dit aussi que $P(x)$ est un *prédicat* portant sur la variable x). Alors

$$\text{non } (\forall x \in E, P(x)) \iff (\exists x \in E, \text{non } P(x))$$

et

$$\text{non } (\exists x \in E, P(x)) \iff (\forall x \in E, \text{non } P(x))$$

Autrement dit, pour écrire la négation d'une proposition contenant les symboles \forall et/ou \exists :

- on remplace \forall par \exists et \exists par \forall ;
- on nie la proposition finale.

Exemple 1. « Quel que soit le jour de la semaine, un élève de prépa fait des mathématiques. » admet comme négation : « Il existe au moins un jour de la semaine où un élève de prépa ne fait pas des mathématiques. ».

2. La négation de « $\forall x \in E, f(x) > 0$ » est « $\exists x \in E, f(x) \leq 0$ ».

 **Exercice** Donner la négation des propositions suivantes.

1. « $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 3$ »
2. « $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ » (où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ désigne une fonction et $x_0 \in \mathbb{R}$)

Remarque : le troisième point est la définition de « f est continue au point x_0 ».

3) Ordre des quantificateurs

- On peut permuter deux symboles de même type qui se suivent (deux symboles \forall ou deux symboles \exists) : si E et F sont deux ensembles et si P est un prédicat portant sur deux variables $x \in E$ et $y \in F$, alors :

$$(\forall x \in E, \forall y \in F, P(x, y)) \iff (\forall y \in F, \forall x \in E, P(x, y))$$

et :

$$(\exists x \in E, \exists y \in F, P(x, y)) \iff (\exists y \in F, \exists x \in E, P(x, y))$$

- **MAIS** on ne peut pas permuter \exists et \forall . Les assertions :

$$(\forall x \in E, \exists y \in F, P(x, y)) \quad \text{et} \quad (\exists y \in F, \forall x \in E, P(x, y))$$

ne sont pas équivalentes.

Exemple L'assertion :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N}, q > p$$

est vraie (si $p \in \mathbb{N}$ est fixé, $q = p + 1 \in \mathbb{N}$ convient) tandis que l'assertion :

$$\exists q \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, q > p$$

est fausse (par exemple pour $p = q + 1$ l'inégalité $q > p$ est fausse).

III – Quelques méthodes de démonstrations

On présente ici les méthodes de démonstrations les plus fréquemment utilisés.

1) Le raisonnement « direct » (dit *par déduction*)

C'est le type de raisonnement le plus courant. On déduit de la proposition P une succession de propositions jusqu'à obtenir la proposition Q.

Exemple 1. $\underbrace{AB = 3, AC = 4 \text{ et } BC = 5}_P$, alors $\underbrace{\text{le triangle } ABC \text{ est rectangle en } A}_Q$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x \in \mathbb{R}_+ \implies 0 \leq \frac{e^{-x}}{1+x^3} \leq 1$$

2) Le raisonnement par contraposition

Soient P et Q deux propositions. En utilisant une table de vérité, il est aisé de démontrer la propriété suivante.

Proposition (raisonnement par contraposition) On a l'équivalence :

$$(P \implies Q) \iff (\text{non } Q) \implies (\text{non } P)$$

Démonstration Comparer les tables de vérités de $(P \implies Q)$ et de $(\text{non } Q) \implies (\text{non } P)$. ■

Exemple « Il neige donc il fait froid. » admet pour contraposée « Il ne fait pas froid donc il ne neige pas. » (à ne pas confondre avec la réciproque qui est fausse).

 **Exercice** Donner la forme contraposée de chacune des implications suivantes.

1. $x \geq \alpha \implies f(x) \geq \beta$
2. $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$

Pour démontrer que $(P \implies Q)$, il est parfois plus commode de démontrer que $(\text{non } Q \implies \text{non } P)$. Par exemple, supposons que l'on veuille démontrer l'implication

$$x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \implies xy \neq 0$$


Comme on est plus à l'aise avec le signe « = », on va démontrer sa forme contraposée qui est :

$$xy = 0 \implies (x = 0 \text{ ou } y = 0)$$

Or on sait bien que cette implication est vraie : si un produit de nombres est nul, c'est que l'un de ces deux nombres est nul (équation « produit-nul »).

 **Exercice** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'implication $(n^2 \text{ pair}) \implies (n \text{ pair})$.

Solution. La forme contraposée est $(n \text{ impair}) \implies (n^2 \text{ impair})$. Supposons que n soit un entier naturel impair. Il existe alors un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$. On a donc $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Donc n^2 est un entier naturel impair.

 **Exercice** Soient $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Montrer que :

$$x \neq y \implies \frac{x+2}{x-1} \neq \frac{y+2}{y-1}$$

3) Le raisonnement par disjonction de cas

Lorsqu'on veut montrer que $P \implies Q$, on est parfois amené à traiter plusieurs cas.

Exemple Soit n un entier naturel. Montrons que $n(n+1)$ est un entier pair.

Solution. On procède par disjonction des cas en raisonnant sur la parité de l'entier n .


Premier cas : n est pair.

Il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$. Alors $n(n+1) = 2k(2k+1) = 2(k^2+k)$ est pair.

Deuxième cas : n est impair.

Il existe un entier naturel k tel que $n = 2k+1$. Alors $n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(k+1)(2k+1)$ est pair.

Dans les deux cas, l'entier $n(n+1)$ est pair, ce qui démontre le résultat.

 **Exercice** Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.

Solution. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On distingue les cas où $x \leq y$ et $x > y$.

- **Premier cas :** $x \leq y$. Alors $\max(x, y) = y$ et $x + y + |x - y| = x + y + (y - x) = 2y$ donc $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.
- **Deuxième cas :** $x > y$. Alors $\max(x, y) = x$ et $x + y + |x - y| = x + y + (x - y) = 2x$ donc $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.

Finalement, dans les deux cas on a $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.

4) Le raisonnement par l'absurde

On veut démontrer une proposition P . Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer que P est fausse et d'en déduire une absurdité.

Exemple Montrons que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

 **Exercice** Soient $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

5) Démonstration à l'aide d'un contre-exemple

Cette méthode est utilisée pour montrer qu'une assertion est fautive en trouvant un exemple qui la contredit.

Exemple La proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x - 3 \geq 0$ » est fautive. En effet, $x = 0$ en est un contre-exemple.

ATTENTION : on peut montrer qu'une proposition est fautive avec un contre-exemple. En revanche, un exemple ne suffit pas à prouver qu'une proposition est vraie !

6) Le raisonnement par analyse-synthèse

Ce raisonnement permet de démontrer l'existence et l'unicité d'un objet vérifiant des propriétés données. Il se décompose en deux parties.

- **Phase d'analyse** : on suppose que l'objet existe et on essaie de trouver des propriétés que doit posséder cet objet. On obtient alors que : « si l'objet existe, alors il s'agit nécessairement de celui-ci : ... » (c'est la *condition nécessaire d'existence*). Cela prouve l'unicité.
- **Phase de synthèse** : on considère l'objet obtenue à l'issue de la phase d'analyse et on montre que celui-ci est solution du problème, ce qui démontre l'existence.

Exemple Résoudre l'équation $x = \sqrt{-3x - 2}$.

Exemple Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et d'une fonction impaire $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Solution. On raisonne par analyse-synthèse.

- **Analyse** : supposons qu'il existe des fonctions p et i paire et impaire respectivement sur \mathbb{R} telles que $f = p + i$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$$

ce qui donne, combiné à l'identité $f(x) = p(x) + i(x)$:

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad (1)$$

Ainsi, si p et i existent, on a déterminé leurs expressions (on a donc l'unicité).

- **Synthèse** : réciproquement, les expressions de p et i obtenues en (1) définissent des fonctions paire et impaire respectivement et on a bien l'égalité $f = p + i$.

7) Le raisonnement par récurrence

(a) L'ensemble des entiers naturels

La construction axiomatique de l'ensemble \mathbb{N} est hors-programme. On le considèrera tel qu'il a été introduit au lycée : l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels est :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10, 11, \dots\}$$

Cet ensemble est *infini* et on le munit naturellement d'une addition et d'une multiplication. Ces opérations sont des *lois de compositions internes* dans \mathbb{N} , c'est-à-dire :

- ★ $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m + n \in \mathbb{N}$;
- ★ $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, mn \in \mathbb{N}$.

Cet ensemble est muni d'un *élément neutre pour l'addition*, à savoir 0 (on a $0 \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 + n = n + 0 = n$). En outre, on peut munir \mathbb{N} de deux relations d'ordre, à savoir :

- l'ordre naturel donné par la relation \leq ;
- la divisibilité : si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, on notera $a \mid b$ (« a divise b ») s'il existe un entier naturel c tel que $b = ac$. Par exemple, $2 \mid 4$ mais $3 \nmid 5$.

Notations.

- ★ Si m et n sont des entiers naturels tels que $m \leq n$, alors on notera $[[m, n]]$ l'intervalle d'entiers $\{m, m + 1, \dots, n\}$.
- ★ On notera \mathbb{N}^* l'ensemble des entiers naturels non nuls, c'est-à-dire $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Le résultat suivant, que l'on peut déduire de la construction de \mathbb{N} , sera admis dans la suite :

Axiome Toute partie non vide de \mathbb{N} possède un plus petit élément (ou minimum).

Remarques :

- ★ Si $A \subset \mathbb{N}$ est un sous-ensemble non vide de \mathbb{N} , dire que a^* est *le plus petit élément de A* signifie deux choses :
 - $a^* \in A$;
 - $\forall a \in A, a^* \leq a$.

On note : $a^* = \min(A)$.

- ★ Par ailleurs, on dit que A est *majorée* si :

$$\exists M \in \mathbb{N}, \forall a \in A, a \leq M$$

Par exemple, \mathbb{N}^* admet pour plus petit élément l'entier 1. Le résultat intuitif suivant se déduit de l'axiome ci-dessus (il nous sera notamment utile pour démontrer le résultat relatif à la division euclidienne).

Proposition Toute partie non vide et majorée de \mathbb{N} admet un plus grand élément (ou maximum).

Démonstration Soit $A \subset \mathbb{N}$ une partie de \mathbb{N} non vide et majorée. Notons :

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall a \in A, a \leq n\}$$

l'ensemble des majorants de A . Alors :

- $B \neq \emptyset$ car A est majorée ;
- $B \subset \mathbb{N}$.

D'après l'axiome, l'ensemble B admet un plus petit élément ; autrement dit, il existe $b \in B$ (donc b est un majorant de A) tel que :

$$\forall x \in B, b \leq x$$

On distingue ensuite deux cas.

- ★ **Premier cas :** $b = 0$

Alors $A = \{0\}$ (puisque A est non vide et majorée par 0). Donc 0 est le plus grand élément de A .

- ★ **Deuxième cas :** $b \neq 0$

Alors $b - 1 \in \mathbb{N}$ et $b - 1 \notin B$ par définition de b donc $b - 1$ ne majore pas A . Il existe donc $a \in A$ tel que $a > b - 1$, ce qui signifie que $b - 1 < a \leq b$. Nécessairement, $b = a \in A$. Finalement, b est le plus grand élément de A . ■

Voyons une application importante du résultat précédent.

Théorème (de la division euclidienne) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Il existe un unique couple d'entiers relatifs (q, r) tel que :

$$a = bq + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < b \quad (2)$$

On dit qu'on a effectué la division euclidienne de a par b . Dans cette division, le quotient est q , le reste est r .

Démonstration Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. On raisonne par analyse synthèse.

- ★ **Analyse** : supposons qu'il existe $q, r \in \mathbb{Z}$ tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$. Alors $0 \leq a - bq < b$, c'est-à-dire $\frac{a}{b} - 1 < q \leq \frac{a}{b}$. On a donc $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$. Le couple (q, r) est donc uniquement déterminé.
- ★ **Synthèse** : posons $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ et $r = a - bq$. On a alors bien $a = bq + r$ et $\frac{a}{b} - 1 < q \leq \frac{a}{b}$ donc $0 \leq r < b$. ■

(b) Récurrences

Dans toute cette section, on considère, pour tout entier naturel n (où pour tout entier n supérieur ou égal à un entier naturel n_0) un prédicat $\mathcal{P}(n)$.

Récurrence « simple »

Proposition (principe de récurrence) Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que :

- ★ $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*);
- ★ pour tout entier $n \geq n_0$, on a $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n + 1)$ (*hérédité*).

Alors, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0 , la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Démonstration Supposons que les deux points sont vérifiés et posons :

$$E = \{n \geq n_0 \mid \mathcal{P}(n) \text{ n'est pas vraie}\}$$

Il s'agit de montrer que $E = \emptyset$. Par l'absurde, supposons que E soit non vide. D'après l'axiome, E admet un plus petit élément noté m . Comme $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie, on a $m \geq n_0 + 1$. Par définition de m , on sait que $m - 1 \notin E$. Donc $\mathcal{P}(m - 1)$ est vraie, et comme $m - 1 \geq n_0$, on sait (par hérédité) que $\mathcal{P}(m)$ est vraie. Ceci contredit la définition de m . Finalement, $E = \emptyset$. ■


Exemple Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2^n > n$$

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons \mathcal{P}_n la proposition « $2^n > n$ ».

- ★ **Initialisation** : montrons que la proposition \mathcal{P}_1 est vraie. On a $2^1 = 2$ et comme $2 > 1$, la proposition \mathcal{P}_1 est bien vraie.
- ★ **Hérédité**. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose la proposition \mathcal{P}_n . Montrons qu'elle entraîne la proposition \mathcal{P}_{n+1} . Par hypothèse de récurrence, on a $2^n > n$ donc $2 \times 2^n > 2n$ soit $2^{n+1} > n + n$. Comme $n \geq 1$, on a alors $2^{n+1} > n + 1$ et donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie.
- ★ **Conclusion** : par principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2^n > n$$

 **Exercice** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Démontrer que 10 divise $2^{(2^n)} - 6$.

 **Exercice** Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) \geq n$$

Récurrence « double »

Proposition (récurrence double) Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que :

- ★ les propositions $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0 + 1)$ sont vraies (*initialisation*) ;
- ★ pour tout entier $n \geq n_0$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}(n) \\ \mathcal{P}(n + 1) \end{array} \right. \implies \mathcal{P}(n + 2) \quad (\text{hérédité}).$$

Alors, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0 , la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Démonstration Pour tout entier $n \geq n_0$, on considère la proposition $\mathcal{Q}(n)$ définie par :


$$\mathcal{Q}(n) \iff (\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n + 1))$$

Par hypothèse sur la suite $(\mathcal{P}(n))_{n \geq n_0}$:

- ★ $\mathcal{Q}(n_0)$ est vraie ;
- ★ pour tout entier $n \geq n_0$, on a :

$$\mathcal{Q}(n) \implies \mathcal{Q}(n + 1)$$

Par principe de récurrence simple, pour tout entier $n \geq n_0$, la proposition $\mathcal{Q}(n)$ est vraie et donc, pour tout $n \geq n_0$, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie. ■

 **Exercice** On considère la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

En notant φ et $\bar{\varphi}$ les racines du trinôme $X^2 - X - 1$, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \frac{\varphi^n - (\bar{\varphi})^n}{\varphi - \bar{\varphi}}$$

Récurrence « forte »

Proposition (récurrence forte) Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que :


- ★ $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*) ;
- ★ pour tout entier $n \geq n_0$, on a :

$$(\forall k \in \llbracket n_0, n \rrbracket, \mathcal{P}(k)) \implies \mathcal{P}(n + 1) \quad (\text{hérédité})$$

Alors, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0 , la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Démonstration On procède comme dans la démonstration précédente, en considérant, pour tout $n \geq n_0$, le prédicat $\mathcal{Q}(n)$ définie par :

$$\mathcal{Q}(n) \iff (\forall k \in \llbracket n_0, n \rrbracket, \mathcal{P}(k))$$

 **Exercice** On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + \dots + u_0$. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2^n$.