

ÉLÉMENTS DE LOGIQUE ET DE THÉORIE DES ENSEMBLES

Table des matières

1	Quelques notions de logique élémentaire	2
1.1	Assertions mathématiques	2
1.2	Opérations sur les assertions	2
1.3	Propriétés des opérateurs NON, ET, OU, \implies et \iff	4
2	Les quantificateurs universel \forall et existentiel \exists	6
2.1	Définition	6
2.2	Négation	6
2.3	Ordre des quantificateurs	7
3	Quelques méthodes de démonstrations	7
3.1	Le raisonnement « direct » (dit <i>par déduction</i>)	7
3.2	Le raisonnement par contraposition	8
3.3	Le raisonnement par disjonction de cas	8
3.4	Le raisonnement par l'absurde	9
3.5	Démonstration à l'aide d'un contre-exemple	9
3.6	Le raisonnement par analyse-synthèse	9
3.7	Le raisonnement par récurrence	10
3.7.1	L'ensemble des entiers naturels	10
3.7.2	Récurrences	11
4	Généralités sur les ensembles	13
4.1	Notion d'ensemble	13
4.2	Ensembles et inclusion	14
4.3	Comment montrer qu'un ensemble est inclus dans un autre?	14
4.4	Comment démontrer que deux ensembles sont égaux?	15
4.5	Les ensembles de nombres à connaître	15
5	Opérations sur les parties d'un ensemble	15
5.1	Intersection, réunion, complémentaire et différence	15
5.2	Produit cartésien d'ensembles	17
6	Ensemble des parties d'un ensemble	18
7	Recouvrement disjoint et partition d'un ensemble	19

A – Logique et raisonnements

I – Quelques notions de logique élémentaire

1) Assertions mathématiques

Définition Une *assertion* est un énoncé mathématique qui est soit vrai soit faux (pas les deux à la fois).

On associe à une assertion une valeur de vérité : V (vraie) ou F (fausse).

- Exemple**
1. P : « $2 + 1 = 4$ » (F)
 2. Q : « $\pi \in \mathbb{N}$ » (F)
 3. R : « la fonction exponentielle est strictement croissante sur \mathbb{R} » (V)

Faire des mathématiques, c'est énoncer et démontrer des assertions vraies, que l'on appelle alors des *propositions*.

Définition (vocabulaire)

- ★ Un *théorème* est une proposition importante.
- ★ Un *corollaire* est une conséquence (plus ou moins) directe d'un théorème.
- ★ Un *lemme* est une proposition intermédiaire permettant de démontrer un théorème.
- ★ Un *axiome* est une assertion que l'on décide vraie.

2) Opérations sur les assertions

Il existe cinq connecteurs logiques qui permettent de construire de nouvelles assertions à partir d'assertions existantes : la *négation*, *ou*, *et*, l'*implication* (\implies) et l'*équivalence* (\iff).

★ Opérateur NON

Définition Soit P une assertion. L'assertion contraire (ou la négation) de P est la proposition **non P** telle que :

- non P est fausse quand P est vraie
- non P est vraie quand P est fausse

On résume les valeurs de l'assertion non P (vraie ou fausse) dans une table de vérité.

P	non P
V	F
F	V

★ Opérateur ET

Définition (conjonction de deux assertions) Soient P et Q deux assertions. On définit l'assertion (P et Q) par :

- (P et Q) est vraie si P et Q sont vraies toutes les deux ;
- (P et Q) est fausse sinon.

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple ★ (« $3 > 0$ ») et (« π est un entier ») est fausse ;
 ★ ($1 + 1 = 2$) et (la fonction inverse est décroissante sur $[1, 2]$) est vraie.

★ **Opérateur OU**

Définition (disjonction de deux assertions) Soient P et Q deux assertions. On définit l'assertion (P ou Q) par :

- (P ou Q) est vraie si au moins l'une des deux assertions P ou Q est vraie ;
- (P ou Q) est fausse sinon.

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarque. Le « ou » mathématique n'est pas exclusif. Si les deux propositions P et Q sont vraies, alors la proposition (P ou Q) est vraie. Ceci est à comparer avec le « ou » dans l'expression *fromage ou dessert*.

Exemple 1. (« la fonction \ln est croissante ») ou (« $1 < 0$ ») est vraie.
 2. (« $2 + 1 = 4$ ») ou (« π est un entier ») est fausse.

★ **L'opérateur IMPLICATION (\implies)**

Définition Soient P et Q deux assertions. L'assertion ($P \implies Q$) (à lire « P implique Q ») est définie par :

- ($P \implies Q$) est fausse si Q est fausse et P est vraie ;
- ($P \implies Q$) est vraie sinon.

P	Q	$P \implies Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque : on notera que si P est fausse, alors $(P \implies Q)$ est toujours vraie.

- Exemple**
- $(1 = 2) \implies (3 = 4)$ est vraie.
 - Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :
 - $(x > 3) \implies (x^2 > 9)$ est vraie ;
 - $(x^2 > 9) \implies (x > 3)$ est fausse.
 - $(2 < 0) \implies$ (J'ai mangé une pomme hier à 21h.) est vraie.

Remarque. Lorsque $(P \implies Q)$ est vraie, on dit que Q est une **condition nécessaire** à la réalisation de P (il faut que Q soit vraie pour que P le soit) et que P est une **condition suffisante** à la réalisation de P (il suffit que P soit vraie pour que Q le soit).

- Exemple**
- « Pour faire une tarte tatin, il faut des pommes. » (vrai)
condition nécessaire
 - « Il suffit d'avoir des pommes pour faire une tarte tatin. » (faux)
 - « Pour qu'un parallélogramme soit un rectangle, il suffit qu'il ait un angle droit. » (vrai)
condition suffisante

★ **Opérateur ÉQUIVALENCE** (\iff)

La notion d'équivalence pour les assertions correspond à la notion d'égalité pour les nombres.

Définition Soient P et Q deux assertions. On définit l'assertion $(P \iff Q)$ par

- $(P \iff Q)$ est vraie si les deux assertions ont la même valeur (toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses) ;
- $(P \iff Q)$ est fausse sinon.

Lorsque $(P \iff Q)$ est vraie, on dit que les assertions P et Q sont *équivalentes*.

P	Q	$P \iff Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- Exemple**
- $(1 = 2) \iff (3 < 0)$
 - P : « $x = 1$ » et Q : « $x^2 = 1$ » ne sont pas équivalentes.
 - P : « $e^x = e^y$ » et Q : « $x = y$ » sont équivalentes.
 - P : « le triangle ABC est rectangle en A » et Q : « $AB^2 + AC^2 = BC^2$ » sont équivalentes.
 - P : « $x > 0$ » et Q : « $x^2 > 0$ » ne sont pas équivalentes.
 - $(1 = 0) \iff$ (2 est impair)

Exercice Soient P et Q deux assertions. Montrer que :

$$(P \implies Q) \iff ((\text{non } P) \text{ ou } Q)$$

3) Propriétés des opérateurs NON, ET, OU, \implies et \iff

Toutes les propriétés qui suivent sont intuitives. On les démontre facilement en utilisant les tables de vérité.

Proposition Soient P, Q et R trois propositions.

- **idempotence** : $(P \text{ et } P) \iff P$, $(P \text{ ou } P) \iff P$
- **double négation** : $\text{non}(\text{non } P) \iff P$
- **commutativité du et** : $(P \text{ et } Q) \iff (Q \text{ et } P)$
- **commutativité du ou** : $(P \text{ ou } Q) \iff (Q \text{ ou } P)$
- **associativité du et** : $P \text{ et } (Q \text{ et } R) \iff (P \text{ et } Q) \text{ et } R$ (on n'a donc pas besoin de parenthèses lorsqu'on a plusieurs *et* consécutifs)
- **associativité du ou** : $P \text{ ou } (Q \text{ ou } R) \iff (P \text{ ou } Q) \text{ ou } R$ (on n'a donc pas besoin de parenthèses lorsqu'on a plusieurs *ou* consécutifs)
- **distributivité du et sur le ou** : $(P \text{ ou } Q) \text{ et } R \iff (P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)$ (en analogie avec la distributivité de + par rapport à \times pour les nombres)
- **distributivité du ou sur le et** : $(P \text{ et } Q) \text{ ou } R \iff (P \text{ ou } R) \text{ et } (Q \text{ ou } R)$
- **négation d'une implication** : $\text{non}(P \implies Q) \iff (P \text{ et } \text{non}(Q))$
- **tansitivité de \implies** : $(P \implies Q) \text{ et } (Q \implies R) \iff (P \implies R)$

Démonstration (de la distributivité du *et* sur le *ou*) On utilise des tables de vérité pour démontrer chaque propriété. On commence par la table de vérité de la proposition $(P \text{ ou } Q) \text{ et } R$.

P	Q	R	P ou Q	(P ou Q) et R
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

On écrit maintenant la table de vérité de $(P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)$.

P	Q	R	P et R	Q et R	(P et R) ou (Q et R)
V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	F
V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	F	F

On constate que les dernières colonnes des deux tables de vérités sont les mêmes. Ceci signifie que les deux propositions $[(P \text{ ou } Q) \text{ et } R]$ et $[(P \text{ et } R) \text{ ou } (Q \text{ et } R)]$ sont équivalentes. ■

Proposition (lois de De Morgan) Soient P et Q deux assertions. Alors :

1. $\text{non}(P \text{ et } Q) \iff (\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$
2. $\text{non}(Q \text{ ou } P) \iff (\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$

Démonstration

 **Exercice** Donner l'événement contraire de chacun des événements suivants.

1. « $-1 < x \leq 3$ »
2. « Au moins un élève de la classe a les yeux verts » ou « j'ai faim »

Remarques. Soient P et Q deux propositions. La négation de $P \implies Q$ est $[P \text{ et } (\text{non } Q)]$.

Proposition (lien entre implication et équivalence) Soient P et Q deux propositions. Alors P est équivalente à Q si et seulement si P implique Q et Q implique P.

$$(P \iff Q) \iff [(P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P)]$$

Démonstration en exercice ■

II – Les quantificateurs universel \forall et existentiel \exists

1) Définition


Définition

- Le quantificateur universel \forall signifie « pour tout » ou « quel que soit ».
- Le quantificateur existentiel \exists signifie « il existe au moins ».
- On peut aussi utiliser $\exists!$ qui signifie « il existe un unique ».

Exemple $\star \forall x \in]-\infty, \sqrt{3}], x^2 \geq 3$

$\star \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists m \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{m} < 10^{-n}$

$\star \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leq x < n + 1$

 **Exercice** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Traduire avec des quantificateurs les énoncés suivants.

1. La fonction f est strictement positive sur $[0, 1]$.
2. La fonction f s'annule une et une seule fois sur l'intervalle $[0, 1]$.
3. La fonction f est nulle sur \mathbb{R} .
4. Tout élément de \mathbb{R}_+ admet un unique antécédent par l'application f dans \mathbb{R} .

2) Négation

Attention aux négations des phrases quantifiées.

Proposition Soient E un ensemble et, pour tout $x \in E$, soit $P(x)$ une assertion portant sur l'élément x de E (on dit aussi que $P(x)$ est un *prédicat* portant sur la variable x). Alors

$$\text{non } (\forall x \in E, P(x)) \iff (\exists x \in E, \text{non } P(x))$$

et

$$\text{non } (\exists x \in E, P(x)) \iff (\forall x \in E, \text{non } P(x))$$

Autrement dit, pour écrire la négation d'une proposition contenant les symboles \forall et/ou \exists :

- on remplace \forall par \exists et \exists par \forall ;
- on nie la proposition finale.

Exemple 1. « Quel que soit le jour de la semaine, un élève de prépa fait des mathématiques. » admet comme négation : « Il existe au moins un jour de la semaine où un élève de prépa ne fait pas des mathématiques. ».

2. La négation de « $\forall x \in E, f(x) > 0$ » est « $\exists x \in E, f(x) \leq 0$ ».

 **Exercice** Donner la négation des propositions suivantes.

1. « $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \leq 3$ »
2. « $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| \leq \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ » (où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ désigne une fonction et $x_0 \in \mathbb{R}$)

Remarque : le troisième point est la définition de « f est continue au point x_0 ».

3) Ordre des quantificateurs

- On peut permuter deux symboles de même type qui se suivent (deux symboles \forall ou deux symboles \exists) : si E et F sont deux ensembles et si P est un prédicat portant sur deux variables $x \in E$ et $y \in F$, alors :

$$(\forall x \in E, \forall y \in F, P(x, y)) \iff (\forall y \in F, \forall x \in E, P(x, y))$$

et :

$$(\exists x \in E, \exists y \in F, P(x, y)) \iff (\exists y \in F, \exists x \in E, P(x, y))$$

- **MAIS** on ne peut pas permuter \exists et \forall . Les assertions :

$$(\forall x \in E, \exists y \in F, P(x, y)) \quad \text{et} \quad (\exists y \in F, \forall x \in E, P(x, y))$$

ne sont pas équivalentes.

Exemple L'assertion :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists q \in \mathbb{N}, q > p$$

est vraie (si $p \in \mathbb{N}$ est fixé, $q = p + 1 \in \mathbb{N}$ convient) tandis que l'assertion :

$$\exists q \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, q > p$$

est fausse (par exemple pour $p = q + 1$ l'inégalité $q > p$ est fausse).

III – Quelques méthodes de démonstrations

On présente ici les méthodes de démonstrations les plus fréquemment utilisés.

1) Le raisonnement « direct » (dit *par déduction*)

C'est le type de raisonnement le plus courant. On déduit de la proposition P une succession de propositions jusqu'à obtenir la proposition Q.

Exemple 1. $\underbrace{AB = 3, AC = 4 \text{ et } BC = 5}_P$, alors $\underbrace{\text{le triangle } ABC \text{ est rectangle en } A}_Q$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x \in \mathbb{R}_+ \implies 0 \leq \frac{e^{-x}}{1+x^3} \leq 1$$

2) Le raisonnement par contraposition

Soient P et Q deux propositions.

Proposition (raisonnement par contraposition) On a l'équivalence :

$$(P \implies Q) \iff (\text{non } Q) \implies (\text{non } P)$$

Démonstration Par définition d'une implication, on a :

$$\begin{aligned} ((\text{non } Q) \implies (\text{non } P)) &\iff (\text{non}(\text{non } Q)) \text{ ou } (\text{non } P) \\ &\iff Q \text{ ou } (\text{non } P) \\ &\iff (P \implies Q) \end{aligned}$$

■

Exemple « Il neige donc il fait froid. » admet pour contraposée « Il ne fait pas froid donc il ne neige pas. » (à ne pas confondre avec la réciproque qui est fausse).

 **Exercice** Donner la forme contraposée de chacune des implications suivantes.

1. $x \geq \alpha \implies f(x) \geq \beta$
2. $x \neq y \implies f(x) \neq f(y)$

Pour démontrer que $(P \implies Q)$, il est parfois plus commode de démontrer que $(\text{non } Q \implies \text{non } P)$. Par exemple, supposons que l'on veuille démontrer l'implication

$$x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \implies xy \neq 0$$


Comme on est plus à l'aise avec le signe « = », on va démontrer sa forme contraposée qui est :

$$xy = 0 \implies (x = 0 \text{ ou } y = 0)$$

Or on sait bien que cette implication est vraie : si un produit de nombres est nul, c'est que l'un de ces deux nombres est nul (équation « produit-nul »).

 **Exercice** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'implication $(n^2 \text{ pair}) \implies (n \text{ pair})$.

Solution. La forme contraposée est $(n \text{ impair}) \implies (n^2 \text{ impair})$. Supposons que n soit un entier naturel impair. Il existe alors un entier naturel k tel que $n = 2k + 1$. On a donc $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Donc n^2 est un entier naturel impair.

 **Exercice** Soient $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Montrer que :

$$x \neq y \implies \frac{x+2}{x-1} \neq \frac{y+2}{y-1}$$

3) Le raisonnement par disjonction de cas

Lorsqu'on veut montrer que $P \implies Q$, on est parfois amené à traiter plusieurs cas.

Exemple Soit n un entier naturel. Montrons que $n(n+1)$ est un entier pair.

Solution. On procède par disjonction des cas en raisonnant sur la parité de l'entier n .


Premier cas : n est pair.

Il existe un entier naturel k tel que $n = 2k$. Alors $n(n+1) = 2k(2k+1) = 2(k^2+k)$ est pair.

Deuxième cas : n est impair.

Il existe un entier naturel k tel que $n = 2k+1$. Alors $n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(k+1)(2k+1)$ est pair.

Dans les deux cas, l'entier $n(n+1)$ est pair, ce qui démontre le résultat.

 **Exercice** Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.

Solution. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On distingue les cas où $x \leq y$ et $x > y$.

- **Premier cas :** $x \leq y$. Alors $\max(x, y) = y$ et $x + y + |x - y| = x + y + (y - x) = 2y$ donc $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.
- **Deuxième cas :** $x > y$. Alors $\max(x, y) = x$ et $x + y + |x - y| = x + y + (x - y) = 2x$ donc $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.

Finalement, dans les deux cas on a $\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$.

4) Le raisonnement par l'absurde

On veut démontrer une proposition P . Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer que P est fausse et d'en déduire une absurdité.

Exemple Montrons que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

 **Exercice** Soient $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Démontrer que $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

5) Démonstration à l'aide d'un contre-exemple

Cette méthode est utilisée pour montrer qu'une assertion est fausse en trouvant un exemple qui la contredit.

Exemple La proposition « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x - 3 \geq 0$ » est fausse. En effet, $x = 0$ en est un contre-exemple.

ATTENTION : on peut montrer qu'une proposition est fausse avec un contre-exemple. En revanche, un exemple ne suffit pas pour prouver qu'une proposition est vraie !

6) Le raisonnement par analyse-synthèse

Ce raisonnement permet de démontrer l'existence et l'unicité d'un objet vérifiant des propriétés données. Il se décompose en deux parties.

- **Phase d'analyse :** on suppose que l'objet existe et on essaie de trouver des propriétés que doit posséder cet objet. On obtient alors que : « si l'objet existe, alors il s'agit nécessairement de celui ci : ... » (c'est la *condition nécessaire d'existence*). Cela prouve l'unicité.
- **Phase de synthèse :** on considère l'objet obtenue à l'issue de la phase d'analyse et on montre que celui-ci est solution du problème, ce qui démontre l'existence.

Exemple Résoudre l'équation $x = \sqrt{-3x - 2}$.

Exemple Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et d'une fonction impaire $i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Solution. On raisonne par analyse-synthèse.

- **Analyse** : supposons qu'il existe des fonctions p et i paire et impaire respectivement sur \mathbb{R} telles que $f = p + i$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$$

ce qui donne, combiné à l'identité $f(x) = p(x) + i(x)$:

$$p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad (1)$$

Ainsi, si p et i existent, on a déterminé leurs expressions (on a donc l'unicité).

- **Synthèse** : réciproquement, les expressions de p et i obtenues en (1) définissent des fonctions paire et impaire respectivement et on a bien l'égalité $f = p + i$.

7) Le raisonnement par récurrence

(a) L'ensemble des entiers naturels

La construction axiomatique de l'ensemble \mathbb{N} est hors-programme. On le considèrera tel qu'il a été introduit au lycée : l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels est :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, 10, 11, \dots\}$$

Cet ensemble est *infini* et on le munit naturellement d'une addition et d'une multiplication. Ces opérations sont des *lois de compositions internes* dans \mathbb{N} , c'est-à-dire :

- ★ $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, m + n \in \mathbb{N}$;
- ★ $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, mn \in \mathbb{N}$.

Cet ensemble est muni d'un *élément neutre pour l'addition*, à savoir 0 (on a $0 \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 + n = n + 0 = n$). En outre, on peut munir \mathbb{N} de deux relations d'ordre, à savoir :

- l'*ordre naturel donné par la relation* \leq ;
- la *divisibilité* : si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, on notera $a \mid b$ (« a divise b ») s'il existe un entier naturel c tel que $b = ac$. Par exemple, $2 \mid 4$ mais $3 \nmid 5$.

Notations.

- ★ Si m et n sont des entiers naturels tels que $m \leq n$, alors on notera $\llbracket m, n \rrbracket$ l'intervalle *d'entiers* $\{m, m + 1, \dots, n\}$.
- ★ On notera \mathbb{N}^* l'ensemble des entiers naturels non nuls, c'est-à-dire $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Le résultat suivant, que l'on peut déduire de la construction de \mathbb{N} , sera admis dans la suite :

Axiome Toute partie non vide de \mathbb{N} possède un plus petit élément (ou minimum).

Remarques :

- ★ Si $A \subset \mathbb{N}$ est un sous-ensemble non vide de \mathbb{N} , dire que a^* est *le plus petit élément de A* signifie deux choses :
 - $a^* \in A$;

— $\forall a \in A, a^* \leq a$.

On note : $a^* = \min(A)$.

★ Par ailleurs, on dit que A est *majorée* si :

$$\exists M \in \mathbb{N}, \forall a \in A, a \leq M$$

Par exemple, \mathbb{N}^* admet pour plus petit élément l'entier 1. Le résultat intuitif suivant se déduit de l'axiome ci-dessus (il nous sera notamment utile pour démontrer le résultat relatif à la division euclidienne).

Proposition Toute partie non vide et majorée de \mathbb{N} admet un plus grand élément (ou maximum).

Démonstration Soit $A \subset \mathbb{N}$ une partie de \mathbb{N} non vide et majorée. Notons :

$$B = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall a \in A, a \leq n\}$$

l'ensemble des majorants de A . Alors :

- $B \neq \emptyset$ car A est majorée ;
- $B \subset \mathbb{N}$.

D'après l'axiome, l'ensemble B admet un plus petit élément ; autrement dit, il existe $b \in B$ (donc b est un majorant de A) tel que :

$$\forall x \in B, b \leq x$$

On distingue ensuite deux cas.

★ **Premier cas** : $b = 0$

Alors $A = \{0\}$ (puisque A est non vide et majorée par 0). Donc 0 est le plus grand élément de A .

★ **Deuxième cas** : $b \neq 0$

Alors $b - 1 \in \mathbb{N}$ et $b - 1 \notin B$ par définition de b donc $b - 1$ ne majore pas A . Il existe donc $a \in A$ tel que $a > b - 1$, ce qui signifie que $b - 1 < a \leq b$. Nécessairement, $b = a \in A$. Finalement, b est la plus grand élément de A . ■

Voyons une application importante du résultat précédent.

Théorème (de la division euclidienne) Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. Il existe un unique couple d'entiers relatifs (q, r) tel que :

$$a = bq + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < b \tag{2}$$

On dit qu'on a effectué la division euclidienne de a par b . Dans cette division, le quotient est q , le reste est r .

Démonstration Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. On raisonne par analyse synthèse.

★ **Analyse** : supposons qu'il existe $q, r \in \mathbb{Z}$ tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$. Alors $0 \leq a - bq < b$, c'est-à-dire $\frac{a}{b} - 1 < q \leq \frac{a}{b}$. On a donc $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$. Le couple (q, r) est donc uniquement déterminé.

★ **Synthèse** : posons $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ et $r = a - bq$. On a alors bien $a = bq + r$ et $\frac{a}{b} - 1 < q \leq \frac{a}{b}$ donc $0 \leq r < b$. ■

(b) Récurrences

Dans toute cette section, on considère, pour tout entier naturel n (où pour tout entier n supérieur ou égal à un entier naturel n_0) un prédicat $\mathcal{P}(n)$.

Récurrence « simple »

Proposition (principe de récurrence) Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que :

- ★ $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*);
- ★ pour tout entier $n \geq n_0$, on a $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ (*hérédité*).

Alors, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0 , la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Démonstration Supposons que les deux points sont vérifiés et posons :

$$E = \{n \geq n_0 \mid \mathcal{P}(n) \text{ n'est pas vraie}\}$$

Il s'agit de montrer que $E = \emptyset$. Par l'absurde, supposons que E soit non vide. D'après l'axiome, E admet un plus petit élément noté m . Comme $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie, on a $m \geq n_0 + 1$. Par définition de m , on sait que $m-1 \notin E$. Donc $\mathcal{P}(m-1)$ est vraie, et comme $m-1 \geq n_0$, on sait (par hérédité) que $\mathcal{P}(m)$ est vraie. Ceci contredit la définition de m . Finalement, $E = \emptyset$. ■


Exemple Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2^n > n$$

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons \mathcal{P}_n la proposition « $2^n > n$ ».

- ★ **Initialisation** : montrons que la proposition \mathcal{P}_1 est vraie. On a $2^1 = 2$ et comme $2 > 1$, la proposition \mathcal{P}_1 est bien vraie.
- ★ **Hérédité**. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose la proposition \mathcal{P}_n . Montrons qu'elle entraîne la proposition \mathcal{P}_{n+1} . Par hypothèse de récurrence, on a $2^n > n$ donc $2 \times 2^n > 2n$ soit $2^{n+1} > n+n$. Comme $n \geq 1$, on a alors $2^{n+1} > n+1$ et donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie.
- ★ **Conclusion** : par principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2^n > n$$

 **Exercice** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Démontrer que 10 divise $2^{(2^n)} - 6$.

 **Exercice** Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) \geq n$$

Récurrence « double »

Proposition (récurrence double) Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que :

- ★ les propositions $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies (*initialisation*);
- ★ pour tout entier $n \geq n_0$, on a :

$$\begin{cases} \mathcal{P}(n) \\ \mathcal{P}(n+1) \end{cases} \implies \mathcal{P}(n+2) \quad (\text{hérédité}).$$

Alors, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0 , la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Démonstration Pour tout entier $n \geq n_0$, on considère la proposition $\mathcal{Q}(n)$ définie par :

$$\mathcal{Q}(n) \iff (\mathcal{P}(n) \text{ et } \mathcal{P}(n+1))$$


Par hypothèse sur la suite $(\mathcal{P}(n))_{n \geq n_0}$:

- ★ $\mathcal{Q}(n_0)$ est vraie;

★ pour tout entier $n \geq n_0$, on a :

$$\mathcal{Q}(n) \implies \mathcal{Q}(n+1)$$

Par principe de récurrence simple, pour tout entier $n \geq n_0$, la proposition $\mathcal{Q}(n)$ est vraie et donc, pour tout $n \geq n_0$, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie. ■

 **Exercice** On considère la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

En notant φ et $\bar{\varphi}$ les racines du trinôme $X^2 - X - 1$, démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \frac{\varphi^n - (\bar{\varphi})^n}{\varphi - \bar{\varphi}}$$

Récurrence « forte »

Proposition (récurrence forte) Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que :


- ★ $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*) ;
- ★ pour tout entier $n \geq n_0$, on a :

$$(\forall k \in \llbracket n_0, n \rrbracket, \mathcal{P}(k)) \implies \mathcal{P}(n+1) \quad (\text{hérédité})$$

Alors, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0 , la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Démonstration On procède comme dans la démonstration précédente, en considérant, pour tout $n \geq n_0$, le prédicat $\mathcal{Q}(n)$ définie par :

$$\mathcal{Q}(n) \iff (\forall k \in \llbracket n_0, n \rrbracket, \mathcal{P}(k))$$

 **Exercice** On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + \dots + u_0$. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2^n$.

B – Éléments de théorie des ensembles

IV – Généralités sur les ensembles

1) Notion d'ensemble

Définition (notion d'ensemble) On appelle *ensemble* toute collection non ordonnée d'objets, appelés *éléments*.

Soit E un ensemble non vide. On écrit :

- $x \in E$ si x appartient à l'ensemble E ;
- $x \notin E$ si x n'appartient pas à l'ensemble E .

Remarques. Dans l'écriture $E = \{1, 2, 3\}$, l'ordre des éléments n'a aucune importance. Ainsi, $E = \{2, 1, 3\}$ ou $E = \{3, 2, 1\}$.

Axiome/définition (ensemble vide \emptyset) Il existe un unique ensemble ne contenant aucun élément. On l'appelle *ensemble vide* et on le note \emptyset .

Exemple $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\} = \emptyset$

Remarque : il existe plusieurs manières de définir un ensemble. On peut :

★ lister les éléments de l'ensemble :

Exemple $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ou $F = \{-1, 1\}$ ou $G = \{x^4, x^6, x^8, x^{10}\}$

★ caractériser l'ensemble par une propriété (on dit que l'on écrit l'ensemble *en compréhension*) :

Exemple $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 5\}$, $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 1\}$ ou :

$$G = \{x^{2k} \mid k \in \llbracket 2, 5 \rrbracket\} = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists k \in \{2, 3, 4, 5\} \mid y = x^{2k}\}$$

2) Ensembles et inclusion

Définition (inclusion) Soient E et F deux ensembles. On dit que F est un *sous-ensemble* de E (ou que F est une *partie* de E), et on note $F \subset E$, si tout élément de F est aussi un élément de E .

Remarques.

★ On a donc $F \subset E \iff (\forall x, x \in F \implies x \in E)$.

★ Pour tout ensemble E , on a $\emptyset \subset E$. En effet, l'assertion :

$$\forall x, x \in \emptyset \implies x \in E$$

est vraie puisque la proposition $\mathcal{P} : x \in \emptyset$ est fausse.

Exemple $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{1, 2\}$ et $G = \{3, 4\}$.

- L'ensemble F est constitué des entiers 1 et 2 et ces deux entiers appartiennent à l'ensemble E . On en conclut que F est un sous-ensemble de E (c'est-à-dire $F \subset E$).
- Par contre, $4 \in G$, et $4 \notin E$. Donc G n'est pas une partie de E (c'est-à-dire $G \not\subset E$).

La relation d'inclusion vérifie les propriétés élémentaires suivantes.

Proposition (\subset est une relation d'ordre) La relation \subset est :

★ *réflexive* c'est-à-dire : pour tout ensemble A , on a $A \subset A$;

★ *antisymétrique* c'est-à-dire : pour tous ensembles A et B , alors :

$$(A \subset B \text{ et } B \subset A) \implies A = B$$

★ *transitive* c'est-à-dire : pour tous ensembles A , B et C , alors :

$$A \subset B \text{ et } B \subset C \implies A \subset C$$

On dit que \subset est une *relation d'ordre*.

Démonstration immédiat ■

Remarque : si A et B sont deux ensembles, on n'a pas nécessairement :


$$A \subset B \text{ ou } B \subset A$$

Par exemple, dans \mathbb{N} , il suffit de considérer les sous-ensembles $A = \{0\}$ et $B = \{1\}$.
On dit que la relation d'ordre \subset n'est pas *totale*.

3) Comment montrer qu'un ensemble est inclus dans un autre ?

Pour montrer qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F , on considère un élément x quelconque de E et on démontre qu'il appartient à F . Ce qui a été démontré pour cet élément x étant valable quelque soit le choix de l'élément de E , on en déduit que tous les éléments de E appartiennent à F .

Rédaction. Soit $x \in E$. Montrons que $x \in F$. On démontre que $x \in F$. On conclut : $E \subset F$.

 **Exercice** On considère les ensembles :

$$E = \{x, y \in \mathbb{R} \mid 2x - y = 1\} \quad \text{et} \quad F = \{(t + 1, 2t + 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que $F \subset E$.

4) Comment démontrer que deux ensembles sont égaux ?

La propriété d'antisymétrie de la relation \subset nous donne une méthode pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux. En effet, il suffit de montrer que $E \subset F$ et $F \subset E$. **On dit qu'on raisonne par double inclusion.**

Rédaction. Soit $x \in E$. Montrons que $x \in F$. On démontre que $x \in F$. On a donc : $E \subset F$. Soit $x \in F$. Montrons que $x \in E$. On démontre que $x \in E$. On a donc : $F \subset E$. Conclusion : $E = F$

 **Exercice** Montrer que les ensembles E et F de l'exercice précédent sont égaux.

5) Les ensembles de nombres à connaître

- ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots, 101, \dots\}$
- ensemble des entiers naturels non nuls $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots, \}$
- ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{\dots, -2013, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ou encore :

$$\mathbb{Z} = \{a - b \mid a, b \in \mathbb{N}\}$$

- ensemble des nombres relatifs $\mathbb{Q} = \{\text{quotients de deux entiers relatifs}\} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}^* \right\}$
- ensemble des nombres réels \mathbb{R} (et \mathbb{R}^* , \mathbb{R}_+ , \mathbb{R}_+^* , *etc.*)
- ensemble des nombres complexes \mathbb{C} ($i^2 = -1$)

On a les inclusions :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

V – Opérations sur les parties d'un ensemble

1) Intersection, réunion, complémentaire et différence

Définition (intersection, réunion, complémentaire et différence) Soient E un ensemble et A, B deux parties de E .

1. L'*intersection* de A et de B , notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à la fois à A et à B .

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$

2. L'*union* (ou *réunion*) de A et de B , notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ou à B (c'est-à-dire qui appartiennent à A , à B ou aux deux à la fois).

$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

3. Le *complémentaire* de A dans E , noté \bar{A} ou cA ou $E \setminus A$, est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A .

$$\bar{A} = \{x \in E \mid x \notin A\}$$

4. On appelle *différence* de A et B , notée $A \setminus B$ le sous-ensemble de E suivant :

$$A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$$

Exemple — $\{1, 2\} \cup \{2, 7\} = \{1, 2, 7\}$

— $\{1, 2\} \cap \{2, 7\} = \{2\}$

— $\{1, 3\} \cap \{2, 7\} = \emptyset$

— $\{1, 2, 3\} \setminus \{1, 4, 5\} = \{2, 3\}$

Remarques.

Si A, B et C sont trois sous-ensembles d'un ensemble E , alors on a :

★ $A \setminus A = \emptyset, A \setminus \emptyset = A;$

★ $A \setminus B = A \cap \bar{B};$


★ $A \cap B \subset A \subset A \cup B;$

★ $\begin{cases} A \subset C \\ B \subset C \end{cases} \implies A \cup B \subset C;$

★ $\begin{cases} A \subset B \\ A \subset C \end{cases} \implies A \subset B \cap C;$

★ $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup \emptyset = A;$

★ $A \cap E = A \text{ et } A \cup E = E.$

 **Exercice** Dans \mathbb{R} , on considère les sous-ensembles $A = [0, 1[$ et $B = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Déterminer $A \setminus B, \bar{A} \cup B$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$.


On peut généraliser la réunion et l'intersection à une famille de parties d'un ensemble. Soient E un ensemble, I une famille d'indice (par exemple $I = \llbracket 0, 10 \rrbracket$ ou $I = \mathbb{N}$) et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E (ce qui signifie que : $\forall i \in I, A_i \subset E$).

1. On définit la réunion de la famille $(A_i)_{i \in I}$, notée $\bigcup_{i \in I} A_i$, par :

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}$$

2. On définit l'intersection des ensembles $(A_i)_{i \in I}$, notée $\bigcup_{i \in I} A_i$, par :

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}$$

 **Exercice** Calculer $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, 1 - \frac{1}{n} \right[$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n} \right]$.

Solution. On trouve $[0, 1[$ puis $\{0\}$.

Les propriétés des opérations \cup, \cap , du complémentaire et de la différence sont les suivantes.

Proposition (propriétés des opérations $\cup, \cap, -$ et \setminus) Soient E un ensemble et A, B, C trois sous-ensembles de E .

1. Si $A \subset B$ et $B \subset A$, alors $A = B$.
2. **Idempotence** : $A \cup A = A$ et $A \cap A = A$.
3. **Commutativité** : $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$.
4. **Associativité** : $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ et $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
5. **Distributivité de l'union sur l'intersection** : $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
6. **Distributivité de l'intersection sur l'union** : $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
7. **Involution** : $\overline{\overline{A}} = A$.
8. **Les lois de De Morgan** :

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

et :

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \quad \text{et} \quad A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Démonstration (de l'associativité de \cup sur \cap et de la première loi de De Morgan) l'égalité $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Soit $x \in E$. Alors

1. Montrons


$$\begin{aligned} x \in (A \cap B) \cup C &\iff (x \in A \text{ et } x \in B) \text{ ou } x \in C \\ &\iff (x \in A \text{ ou } x \in C) \text{ et } (x \in B \text{ ou } x \in C) \\ &\iff x \in (A \cup C) \cap (B \cup C) \end{aligned}$$

Ceci montre donc que $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.


2. Montrons que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cap B} &\iff x \notin (A \cap B) \\ &\iff \text{non } (x \in A \cap B) \\ &\iff \text{non } (x \in A \text{ et } x \in B) \\ &\iff \text{non } (x \in A) \text{ ou non } (x \in B) \\ &\iff x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ &\iff x \in \overline{A} \text{ ou } x \in \overline{B} \\ &\iff x \in \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned}$$


d'où l'égalité $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. ■

 **Exercice** Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E . Simplifier l'ensemble suivant :

$$X = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C})$$

 **Exercice** Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E . Montrer que

$$\begin{cases} A \cup C \subset B \cup C \\ A \cap C \subset B \cap C \end{cases} \iff A \subset B$$

 **Exercice** Soient E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E . Montrer l'équivalence

$$A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$$

2) Produit cartésien d'ensembles

Définition (produit cartésien d'ensembles) Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E et de F , noté $E \times F$, est l'ensemble des couples constitués d'un élément de E et d'un élément de F .

$$E \times F = \{(e, f) \mid e \in E \text{ et } f \in F\}$$

ATTENTION : l'ordre des coordonnées est important ! Par exemple, dans \mathbb{R}^2 , le point de coordonnées $(1, 2)$ est différent du point de coordonnées $(2, 1)$.

Exemple 1. Soient $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}$. Alors

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$$

2. Soient $E = \{a, b, c\}$ et $F = \{1, 2\}$. Alors

$$E \times F = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 2)\}$$

On peut généraliser le produit cartésien à une famille finie d'ensembles.

Définition (produit cartésien d'une famille finie d'ensembles) Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ (*i.e.* $n \geq 2$) et E_1, \dots, E_n des ensembles.

★ On définit le produit cartésien de la famille d'ensembles E_1, \dots, E_n par

$$E_1 \times \dots \times E_n = \{(e_1, \dots, e_n) \mid e_1 \in E_1, \dots, e_n \in E_n\}$$

★ Dans le cas où $E_1 = \dots = E_n = E$, on pose :

$$\underbrace{E \times \dots \times E}_{n \text{ fois}} = E^n$$

Un élément de E^n est alors appelé un n -uplet ou une n -liste d'éléments de E .

Exemple Un élément de \mathbb{R}^3 est un triplet (x, y, z) où $x, y, z \in \mathbb{R}$. Par exemple, $(1, \pi, 1) \in \mathbb{R}^3$.

VI – Ensemble des parties d'un ensemble

Commençons par définir l'ensemble des parties d'un ensemble.

Définition (ensemble $\mathcal{P}(E)$) Soit E un ensemble. On appelle *ensemble des parties de l'ensemble E* , l'ensemble noté $\mathcal{P}(E)$, défini par :

$$\mathcal{P}(E) = \{X \mid X \subset E\}$$

Autrement dit, pour tout ensemble X , on a l'équivalence :

$$X \in \mathcal{P}(E) \iff X \subset E$$

- ★ Les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont donc des ensembles (ce sont les sous-ensembles de E).
- ★ Quelque soit l'ensemble E , on a toujours $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et $E \in \mathcal{P}(E)$ (car $\emptyset \subset E$ et $E \subset E$).

Exemple 1. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

2. $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

3. L'ensemble des parties de l'ensemble $E = \{0, 1\}$ est

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, E\}$$

4. L'ensemble des parties de l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ est

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$$

VII – Recouvrement disjoint et partition d'un ensemble

Définition (recouvrement disjoint, partition) Soient E un ensemble, I un ensemble non vide d'indices (fini ou infini) et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de E . On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un *recouvrement disjoint de E* si :

$$\star \forall (i, j) \in I^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset;$$

$$\star \bigcup_{i \in I} A_i = E.$$

On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est une *partition de E* s'il cette famille est un recouvrement disjoint de E et si :

$$\star \forall i \in I, A_i \neq \emptyset.$$

Exemple — $([n, n + 1[)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une partition de \mathbb{R} ;

— $([-n, n])_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas une.