Fractions rationnelles

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne désigne l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I – Corps des fractions rationnelles

1) Notion de fraction rationnelle

On sait que $\mathbb{K}[X]$ est un anneau commutatif intègre, mais ce n'est pas un corps (par exemple car X n'admet pas d'inverse dans $\mathbb{K}[X]$). On peut, à partir de cet anneau, construire ce qu'on appelle son *corps des fractions*. Il s'agit de l'*ensemble des fractions rationnelles*, dont la construction est hors programme.

Définition (le corps $\mathbb{K}(X)$) Il existe un corps, noté $\mathbb{K}(X)$ et appelé corps des fractions rationnelles sur $\mathbb{K}$, vérifiant les propriétés suivantes :

- ⋆ les éléments de $\mathbb{K}(X)$ s'écrivent sous la forme $\dfrac{P}{Q}$, où $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$;
- ⋆ $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$;
- ⋆ l'addition $+$ dans $\mathbb{K}[X]$ est définie par :

$$\forall P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X],\ \forall Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}, \qquad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2} \iff P_1Q_2 = P_2Q_1$$

Un élément de $\mathbb{K}(X)$ est appelé une *fraction rationnelle à coefficients dans* $\mathbb{K}$.

L'ensemble $\mathbb{K}(X)$ contient donc notamment :

- ⋆ les polynômes (si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $P = \frac{P}{1} \in \mathbb{K}(X)$) ;
- ⋆ les inverses des polynômes non nuls (si $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$, alors $\frac{1}{P} \in \mathbb{K}(X)$).

Exemple ⋆ $\dfrac{1}{X} \in \mathbb{K}(X)$, $\dfrac{X-1}{X^3} \in \mathbb{K}(X)$, $X^2 + 2022 \in \mathbb{K}(X)$

- ⋆ On a $\dfrac{X}{X^2+1} = \dfrac{2X}{2X^2+2} = \dfrac{X^2}{X^3+X}$; on dit que ces trois fractions sont des représentants d'une même fraction rationnelle.

Proposition (représentant irréductible d'une fraction rationnelle) Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. À constante multiplicative près, il existe un unique couple $(P, Q) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ tel que :

- ⋆ $P \wedge Q = 1$;
- ⋆ $F = \dfrac{P}{Q}$.

Cette fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ est appelée *le représentant irréductible de* F.

Démonstration Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. On traite séparément l'existence et l'unicité.

- ⋆ **Existence :** par définition de $\mathbb{K}(X)$, il existe $(S,T) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ tel que $F = \dfrac{S}{T}$. Comme $T \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, on a $S \wedge T \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ donc les polynômes $P = \dfrac{S}{S \wedge T}$ et $Q = \dfrac{T}{S \wedge T}$ sont bien définis, et Q est non nul. Par ailleurs, on a l'égalité $F = \dfrac{P}{Q}$. Il reste à vérifier que P et Q sont premiers entre eux. D'après la propriété sur la relation de Bézout, il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $SU + TV = S \wedge T$. En divisant par $S \wedge T$, on obtient l'égalité $PU + QV = 1$. Le théorème de Bézout implique que $P \wedge Q = 1$.
- ⋆ **Unicité :** soient $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$ et $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ tels que :

$$F = \frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2} \qquad \text{et} \qquad P_1 \wedge Q_1 = P_2 \wedge Q_2 = 1$$

Par définition de la relation d'égalité dans $\mathbb{K}(X)$, on a $P_1Q_2 = P_2Q_1$. Ainsi, $Q_1 \mid P_1Q_2$ et comme $P_1 \wedge Q_1 = 1$, le lemme de Gauss implique que $Q_1 \mid Q_2$. De la même manière, on a $Q_2 \mid Q_1$. Les polynômes Q_1 et Q_2 sont donc associés, ce qui signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $Q_1 = \lambda Q_2$. Ensuite :

$$P_1Q_2 = P2Q_1 = \lambda P_2 Q_2 \qquad \text{puis} \qquad (P_1 - \lambda P_2)Q_2 = 0_{\mathbb{K}[X]}$$

Or $Q_2 \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ et l'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre donc $P_1 - \lambda P_2 = 0_{\mathbb{K}[X]}$, *i.e.* $P_1 = \lambda P_2$. Finalement, $(P_1, Q_1) = (\lambda P_2, \lambda Q_2)$ d'où l'unicité, à constante multiplicative près du représentant irréductible d'une fraction rationnelle. ■

Exemple Le représentant irréductible de $F = \dfrac{X-1}{X^2 - 3X + 2}$ est $\dfrac{1}{X-2}$.

Définition (règles de calculs dans $\mathbb{K}(X)$) On définit dans $\mathbb{K}(X)$ la somme $+$, le produit $\times$ et la multiplication par un scalaire par les formules suivantes. Pour tous $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$, pour tous $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose :

$$\frac{P_1}{Q_1} + \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2}, \qquad \frac{P_1}{Q_1} \times \frac{P_2}{Q_2} = \frac{P_1P_2}{Q_1Q_2} \qquad \text{et} \qquad \lambda\frac{P_1}{Q_1} = \frac{\lambda P_1}{Q_1}$$

Remarque : on peut vérifier que les résultats de ces opérations ne dépendent pas des représentants choisis et que $(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps commutatif.

2) Degré d'une fraction rationnelle

La notion de degré d'une fraction rationnelle étend celle déjà vue pour les polynômes.

Proposition/définition Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$, où $P \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$. On appelle *degré de* F, noté $\deg(F)$, l'élément de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ défini par :

$$\deg(F) = \deg(P) - \deg(Q)$$

Démonstration Pour que la définition soit cohérente, il faut vérifier que la différence des degrés ne dépend pas du représentant choisi. Soient $F \in \mathbb{K}(X)$ et $P, R \in \mathbb{K}[X]$ et $Q, S \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ tels que $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{R}{S}$. Alors $PS = QR$ (par définition de la relation d'égalité dans $\mathbb{K}(X)$) et donc (propriété des degrés dans $\mathbb{K}[X]$) :

$$\deg(P) + \deg(S) = \deg(Q) + \deg(R) \qquad i.e. \qquad \deg(P) - \deg(Q) = \deg(R) - \deg(S)$$

La notion de degré, pour une fraction rationnelle, est donc bien définie. ■

Remarques :

- ⋆ Le degré de F vaut $-\infty$ si et seulement si F est la fraction rationnelle nulle.
- ⋆ Une fraction rationnelle de degré 0 peut ne pas être constante. Par exemple, $\deg\left(\dfrac{X}{X+1}\right)=0$.
- ⋆ On a :

$$\deg(F)\leqslant 0 \iff \deg(P)\leqslant\deg(Q)$$

Exemple $\quad \deg\left(\dfrac{X^2+1}{X^3}\right)=-1$

Les propriétés sur les degrés sont les mêmes que dans $\mathbb{K}[X]$.

Proposition (propriétés du degré dans $\mathbb{K}(X)$) Soient $F,G\in\mathbb{K}(X)$. Alors :

- ⋆ $\deg(F+G)\leqslant\max(\deg(F),\deg(G))$ avec égalité si $\deg(F)\neq\deg(G)$;
- ⋆ $\deg(FG)=\deg(F)+\deg(G)$.

Démonstration Soient $F,G\in\mathbb{K}(X)$. Il existe $P,R\in\mathbb{K}[X]$ et $Q,S\in\mathbb{K}[X]\setminus\{0_{\mathbb{K}[X]}\}$ tels que $F=\dfrac{P}{Q}$ et $G=\dfrac{R}{S}$.

- ⋆ Par définition de l'addition dans $\mathbb{K}(X)$, on a $F+G=\dfrac{PS+QR}{QS}$ donc :

$$\begin{aligned}\deg(F+G)&=\deg(PS+QR)-\deg(QS)\\&\leqslant\max(\deg(PS),\deg(QR))-\deg(Q)-\deg(S)\qquad\text{(propriété du degré dans }\mathbb{K}[X])\\&=\max(\deg(P)+\deg(S),\deg(Q)+\deg(R))-\deg(Q)-\deg(S)\\&=\max(\deg(P)-\deg(Q),\deg(R)-\deg(S))\\&=\max(\deg(F),\deg(G))\end{aligned}$$

  Si $\deg(F)\neq\deg(G)$, *i.e.* si $\deg(PS)\neq\deg(QR)$, alors on a égalité (d'après le cas du degré d'une somme dans $\mathbb{K}[X]$).

- ⋆ Par définition du degré de la fraction rationnelle $FG=\dfrac{PR}{QS}$, on a :

$$\begin{aligned}\deg(FG)=\deg(PR)-\deg(QS)&=\deg(P)+\deg(R)-(\deg(Q)+\deg(S))\\&=\deg(P)-\deg(Q)+\deg(R)-\deg(S)\\&=\deg(F)+\deg(G),\end{aligned}$$

  ce qu'il fallait démontrer. ■

3) Racines et pôles

Définition (racines, pôles) Soit $F=\dfrac{P}{Q}\in\mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle écrite sous forme irréductible (*i.e.* telle que $(P,Q)\in\mathbb{K}[X]\times(\mathbb{K}[X]\setminus\{0_{\mathbb{K}[X]}\})$ et $P\wedge Q=1$).

- ⋆ On appelle :
  - — *racines* de F les racines de P dans $\mathbb{K}$;
  - — *pôles* de F les racines de Q dans $\mathbb{K}$.
- ⋆ La multiplicité d'une racine (respectivement d'un pôle) de F est définie comme étant sa multiplicité en tant que racine du polynôme P (respectivement de Q).
- ⋆ On note $\mathrm{Rac}_{\mathbb{K}}(F)$ (respectivement $\mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}(F)$) l'ensemble des racines (respectivement des pôles) de F dans $\mathbb{K}$.

Remarques :

- ⋆ Il est important que la fraction rationnelle soit écrite sous forme irréductible. Par exemple, 0 n'est ni un pôle, ni une racine, de la fraction rationnelle $F = \dfrac{X(X+1)}{X}$.
  En fait, $F = X + 1$ n'a pas de pôle et -1 et sa seule racine.
- ⋆ Toute fraction rationnelle admet un nombre fini de pôles.
- ⋆ Toute fraction rationnelle *non nulle* admet un nombre fini de racines.

Exemple Si $F = \dfrac{X}{(X^2+1)^2}$, alors :

$$\mathrm{Rac}_{\mathbb{R}}(F) = \mathrm{Rac}_{\mathbb{C}}(F) = \{0\}, \qquad \mathrm{Pol}_{\mathbb{R}}(F) = \varnothing \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Pol}_{\mathbb{C}}(F) = \{-i, i\}$$

Les pôles complexes $\pm i$ sont doubles.

De la même manière que pour les fonctions polynomiales, on peut définir la notion de *fonction rationnelle*.

Définition (fonction rationnelle) Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On appelle *fonction rationnelle* associée à F la fonction :

$$\tilde{F} : \begin{cases} \mathbb{K} \setminus \mathrm{Pol}_{\mathbb{K}}(F) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{P(x)}{Q(x)} \end{cases}$$

Remarque : si $F \in \mathbb{R}(X)$, alors $\tilde{F}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \mathrm{Pol}_{\mathbb{R}}(F)$.

II – Éléments simples

1) Définitions

Définition (élément simple sur $\mathbb{K}$) On appelle *élément simple* sur $\mathbb{K}$ toute fraction rationnelle du type $\dfrac{P}{Q^n} \in \mathbb{K}(X)$ où :

- ⋆ Q est irréductible sur le corps $\mathbb{K}$;
- ⋆ $n \in \mathbb{N}^*$;
- ⋆ $\deg(P) < \deg(Q)$.

Remarque (classification des éléments simples sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$) : on connaît les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$. Ainsi :

- ⋆ sur $\mathbb{C}$, les éléments simples sont les fractions rationnelles de la forme :
  $$\frac{\alpha}{(X+\beta)^n}$$
  où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$;
- ⋆ sur $\mathbb{R}$, ce sont les fractions de la forme :
  $$\frac{\alpha}{(X+\beta)^n} \qquad \text{et} \qquad \frac{aX+b}{(X^2+pX+q)^n}$$
  où $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ sont tels que $p^2 - 4q^2 < 0$.

2) Partie entière d'une fraction rationnelle

Proposition/définition (partie entière d'une fraction rationnelle) Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ et une unique fraction rationnelle $G \in \mathbb{K}(X)$ tels que :

- ⋆ $F = E + G$;
- ⋆ $\deg(G) < 0$.

Le polynôme E est appelé la *partie entière* de F (on le note parfois $E(F)$).

Démonstration Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. On démontre l'existence et l'unicité séparément.

- ⋆ **Existence :** par définition d'une fraction rationnelle, il existe $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ tel que $F = \dfrac{A}{B}$. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe également $E, R \in \mathbb{K}[X]$ tels que $A = BE + R$ avec $\deg(R) < \deg(B)$. Ainsi :

$$F = \frac{BE+R}{B} = E + \frac{R}{B} \qquad \text{et} \qquad \deg\left(\frac{R}{B}\right) = \deg(R) - \deg(B) < 0$$

En posant $G = \dfrac{R}{B} \in \mathbb{K}(X)$, on a bien la décomposition annoncée.

- ⋆ **Unicité :** soient $(E_1, G_1), (E_2, G_2) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tels que :

$$F = E_1 + G_1 = E_2 + G_2 \qquad \text{avec } \deg(G_1) < 0 \text{ et } \deg(G_2) < 0$$

Alors $E_1 - E_2 = G_2 - G_1$ donc :

$$\deg(E_2 - E_1) = \deg(G_2 - G_1) \leqslant \max(\deg(G_2), \deg(G_1)) < 0$$

Mais $E_1 - E_2 \in \mathbb{K}[X]$ (comme différence de deux polynômes) donc $\deg(E_1 - E_2) = -\infty$, *i.e.* $E_1 = E_2$. Il s'ensuit alors que $G_1 = G_2$. Ceci démontre l'unicité de la décomposition. ■

Exemple

- ⋆ On a $\dfrac{X+1}{X} = 1 + \dfrac{1}{X}$. Comme $\deg\left(\dfrac{1}{X}\right) = -1 < 0$ et $1 \in \mathbb{K}[X]$, on a nécessairement $E\left(\dfrac{X+1}{X}\right) = 1$ par unicité de la partie entière.
- ⋆ On a $\dfrac{X}{X^2+1} = 0 + \dfrac{X}{X^2+1}$ et $\deg\left(\dfrac{X}{X^2+1}\right) < 0$ donc $E\left(\dfrac{X}{X^2+1}\right) = 0$.
- ⋆ Déterminons $E(F)$ où $F = \dfrac{2X^2+1}{X+1}$. On a (on effectue la division euclidienne de $2X^2+1$ par $X+1$) :

$$2X^2 + 1 = (2X+2)(X+1) - 3 \qquad \text{donc} \qquad F = 2X + 2 - \frac{3}{X+1}$$

donc $E(F) = 2X + 2$ (car $2X + 2 \in \mathbb{K}[X]$, $\deg\left(-\frac{3}{X+1}\right) < 0$ et par unicité de la partie entière).

3) Décomposition en éléments simples

Les théorèmes suivants, qui assurent l'existence de la « décomposition en éléments simples » de toute fraction rationnelle en précisant leur forme, sont admis. On distingue le cas complexe du cas réel.

(a) Le cas complexe ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

Théorème (décomposition en éléments simples, cas complexe) Soit $F = \dfrac{P}{Q}\mathbb{C}(X)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$ et $Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}_0[X]$ est tel que :

$$Q = C_Q \prod_{\ell=1}^{n}(X - a_\ell)^{k_\ell},$$

les nombres complexes $a_1, \dots, a_n$ étant deux à deux distincts (ce sont les pôles de F) et où $k_1, \dots, k_n$ sont des entiers naturels non nuls. On peut décomposer F d'une unique manière sous la forme :

$$F = E(F) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{k_j} \frac{\alpha_{j,\ell}}{(X - a_j)^\ell},$$

les $\alpha_{\ell,j}$ étant des nombres complexes.

Remarque : le cadre le plus simple pour décomposer en éléments simples est celui où tous les pôles de F sont simples. Supposons que :

$$F = \frac{P}{(X - a_1)(X - a_2)\dots(X - a_n)}$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ et où les nombres complexes $a_1, \dots, a_n$ étant deux à deux distincts. D'après le théorème, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ tels que :

$$F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{X - a_i}$$

Expliquons comment déterminer simplement λ_1. On multiplie F par $X - a_1$:

$$\frac{P}{(X - a_2)\dots(X - a_n)} = (X - a_1)F = \lambda_1 + (X - a_1)\sum_{i=2}^{n}\frac{\lambda_i}{X - a_i}$$

En évaluant en a_1, on a donc $\lambda_1 = \dfrac{P(a_1)}{(a_1 - a_2)\dots(a_1 - a_n)}$.

Exemple

- ⋆ Soit $F = \dfrac{1}{X(X+1)(X+2)} \in \mathbb{C}(X)$. On a $\deg(F) = -2 < 0$ donc $E(F) = 0_{\mathbb{C}[X]}$ et, d'après le théorème précédent, il existe un unique triplet $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que :

$$F = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{X+2}$$

- ⋆ Soit $G = \dfrac{X}{(X-i)^2(X+i)^2} \in \mathbb{C}(X)$. Comme $\deg(F) = -3 < 0$, on a $E(G) = 0_{\mathbb{C}[X]}$ et on sait d'après le théorème précédent qu'il existe un unique $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4$ tel que :

$$G = \frac{\alpha}{X - i} + \frac{\beta}{(X-i)^2} + \frac{\gamma}{X+i} + \frac{\delta}{(X+i)^2}$$

Proposition (coefficient pour un pôle simple) Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ (où $P \in \mathbb{C}[X]$ et $Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0_{\mathbb{C}[X]}\}$) une fraction rationnelle et $a \in \mathbb{C}$ un pôle simple de F. L'élément simple $\dfrac{\lambda}{X - a}$ dans la décomposition en éléments simples de F est tel que :

$$\lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}$$

Démonstration D'après le théorème précédent, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ une fraction rationnelle $G \in \mathbb{C}(X)$ n'admettant pas a comme pôle tels que :

$$F = \frac{\lambda}{X-a} + G$$

En multipliant par $X - a$, on obtient :

$$(X-a)\frac{P}{Q} = \lambda + (X-a)G \qquad i.e. \qquad \frac{P}{\frac{Q-Q(a)}{X-a}} = \lambda + (X-a)G$$

On sait que $Q'(a) \neq 0$ (puisque a est un pôle simple de F) donc, en faisant tendre X vers a, on obtient bien l'égalité $\lambda = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$. ■

✎✎✎ **Exercice** Décomposer $F = \dfrac{X}{(X-1)(X-2)}$ sur $\mathbb{C}$.

Solution. On sait qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tels que :

$$F = \frac{\lambda}{X-1} + \frac{\mu}{X-2}$$

On propose ensuite deux méthodes pour trouver λ et μ.

- ⋆ **Première méthode.**
  En multipliant par $(X-1)$, on a :

  $$(X-1)F = \frac{X}{X-2} = \lambda + \mu\frac{X-1}{X-2}$$

  En évaluant ensuite en 1, on obtient $\lambda = -1$. En multipliant F par $X-2$ et en évaluant en 2, on trouve que $\mu = 2$.
- ⋆ **Deuxième méthode.**
  Comme 1 et 2 sont des pôles simples de F, on sait que $\lambda = \dfrac{P(1)}{Q'(1)}$ et $\mu = \dfrac{P(2)}{Q'(2)}$ où $P = X$ et $Q = (X-1)(X-2)$. Par simple calcul, on obtient $\lambda = -1$ et $\mu = 2$.

Voyons maintenant un exemple avec un pôle multiple.

Exemple Considérons la fraction rationnelle $F = \dfrac{X}{(X-1)(X-2)^2}$. Celle-ci est de degré -2 (donc la partie entière est nulle) avec un pôle simple et un pôle double. On sait qu'il existe $\lambda, \mu, \theta \in \mathbb{C}$ tels que :

$$F = \frac{\lambda}{X-1} + \frac{\mu}{X-2} + \frac{\theta}{(X-2)^2}$$

- ⋆ L'une des méthodes vues plus haut permet de trouver le coefficient relatif au pôle simple ; on obtient $\lambda = 1$.
- ⋆ Ensuite, en multipliant la fraction rationnelle par $(X-2)^2$ et en évaluant en 2, on obtient $\theta = \frac{2}{2-1} = 2$.
- ⋆ Pour obtenir μ, on peut par exemple évaluer en 0. On obtient $\mu = -1$. On peut aussi multiplier F par X puis faire tendre X vers $+\infty$. Avec cette seconde méthode, on obtient :

  $$0 = \lambda + \mu \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \mu = -1$$

(b) Le cas réel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Théorème (décomposition en éléments simples, cas réel) Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ (où $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$) une fraction rationnelle telle que :

$$Q = C_Q \prod_{\ell=1}^{n} (X - a_\ell)^{\alpha_\ell} \prod_{\ell=1}^{m} (X^2 + p_\ell X + q_\ell)^{\beta_\ell}$$

la décomposition en produit de facteurs irréductibles de Q sur $\mathbb{R}$, où :

- ⋆ $C \in \mathbb{R}$;
- ⋆ les α_ℓ, β_ℓ sont des entiers naturels non nuls ;
- ⋆ les a_ℓ, p_ℓ, q_ℓ sont des nombres réels tels que $p_\ell^2 - 4q_\ell < 0$.

Alors on peut décomposer F de manière unique sous la forme :

$$F = E(F) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X - a_i)^j} + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\beta_i} \frac{\mu_{i,j} X + \nu_{i,j}}{(X^2 + p_i X + q_i)^j},$$

les $\lambda_{i,j}, \mu_{i,j}$ et $\nu_{i,j}$ étant des nombres réels.

Exemple Si $F = \dfrac{X^3 + 4}{(X-1)^2(X^2+X+1)^2}$, alors $E(F) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ (car $\deg(F) = -3 < 0$) et il existe un unique $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^6$ tel que :

$$F = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{(X-1)^2} + \frac{\gamma X + \delta}{X^2 + X + 1} + \frac{\lambda X + \mu}{(X^2 + X + 1)^2}$$

En pratique, on peut commencer par rechercher la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ avant de regrouper les pôles conjugués.

✎✎✎ **Exercice** Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction rationnelle :

$$F = \frac{1}{X^3 - 1} = \frac{1}{(X-1)(X^2+X+1)}$$

Solution. On a $E(F) = 0_{\mathbb{R}[X]}$ (car $\deg(F) = -3 < 0$). On sait qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$F = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta X + \gamma}{X^2 + X + 1}$$

- ⋆ En multipliant par $X - 1$ et en évaluant en 1, on trouve que $\alpha = \dfrac{1}{3}$.
- ⋆ En multipliant par X puis en faisant tendre X vers $+\infty$, on obtient $\beta - \dfrac{1}{3}$.
- ⋆ En évaluant enfin en 0, on obtient $\gamma = -\dfrac{2}{3}$.

Finalement :

$$\frac{1}{X^3 - 1} = \frac{1}{3(X-1)} - \frac{X+2}{3(X^2+X+1)}$$

4) Dérivée logarithmique

Remarque : si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $u_1, \dots, u_n \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, alors :

$$(u_1 \dots u_n)' = \sum_{i=1}^{n} u_i' \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} u_j$$

Cette formule nous sera utile pour démontrer le résultat suivant.

Proposition (dérivée logarithmique) Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \mathbb{K}_0[X]$. Il existe $C_P \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \ldots, a_n$ des nombres complexes deux à deux distincts et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$P = C_P \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)^{\alpha_i}$$

Alors :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{X - a_i}$$

Démonstration On a :

$$P' = C_P \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (X - a_i)^{\alpha_i - 1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (X - a_i)^{\alpha_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{X - a_i} \right) P,$$

d'où la décomposition annoncée. ■

Remarque : formellement, cela revient à écrire

$$« \ln(P) = \ln(C_P) + \sum_{i=1}^{n} k_i \ln(X - a_i) »$$

et à dériver, d'où l'intitulé « dérivée logarithmique ».

Exemple On a, pour tout entier naturel n non nul,

$$\frac{nX^{n-1}}{X^n - 1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}}$$

En effet, en posant $P = X^n - 1$, on a $P = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}} \right)$ et $P' = nX^{n-1}$.

III – Applications

1) Intégration de fonctions rationnelles

Pour déterminer une primitive d'une fonction rationnelle, on commencera par décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fonction. Il s'agit ensuite d'intégrer chaque élément simple, à savoir chaque fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{(t + a)^n}$ où $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- ⋆ Si $n \geqslant 2$, alors une primitive de f sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ est $F : t \longmapsto -\dfrac{1}{(n-1)(t+a)^{n-1}}$
- ⋆ Supposons maintenant que $n = 1$.
  - — Si $a \in \mathbb{R}$, alors une primitive de f sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ est $F : t \longmapsto \ln(|t + a|)$.
  - — Si $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors il existe $(p, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tel que $a = p + iq$ et donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = \frac{1}{t + p + iq} = \frac{t + p - iq}{(t+p)^2 + q^2}$$
$$= \frac{t + p}{(t+p)^2 + q^2} - i \frac{\frac{1}{q}}{\left(\frac{t+p}{q}\right)^2 + 1}$$

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc :

$$F : t \longmapsto \frac{\ln\left((t+p)^2 + q^2\right)}{2} + i \operatorname{Arctan}\left(\frac{t+p}{q}\right)$$

✎✎✎ **Exercice** Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^3}{t^2-1}\,\mathrm{d}t$.

Solution. On a :

$$\frac{X^3}{X^2-1} = \frac{X(X^2-1)+X}{X^2-1} = X + \underbrace{\frac{X}{X^2-1}}_{\text{notée } G}$$

On sait qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $G = \dfrac{\alpha}{X-1} + \dfrac{\beta}{X+1}$ et on trouve que $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$. Ainsi :

$$I = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{\ln(1-t)}{2} + \frac{\ln(t+1)}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8} - \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)-\ln(2)}{2} = \frac{1}{8} - \ln(2) + \frac{\ln(3)}{2}$$

2) Calcul de dérivées successives de fonctions rationnelles

Pour calculer les dérivées successives d'une fonctions rationnelles f, on commence par décomposer f en élément simples sur $\mathbb{C}$. Il s'agit ensuite de savoir calculer les dérivées de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(x+a)^n}$ où $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

✎✎✎ **Exercice** Calculer les dérivées successives de $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$.

Solution. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}, \qquad f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$$

En notant $f_\pm$ la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x \pm 1}$, on conjecture que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}, \qquad (f_\pm)^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x \pm 1)^{n+1}},$$

ce que l'on vérifie ensuite par récurrence. On conclut alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$$